Undersøgelser angaaende

Mængden af Primtal

under en given Grænse.

Af

Dr. J. P. Gram.

Motto:
Est data lex numeris magnorum horrenda laborum.

En med Videnskabernes Selskabs Guldmedaille belønnet Prisafhandling.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 6.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1884.

Indledning.

At angive i analytisk Form Loven for Primtallenes Fordeling i Talrækken er et Problem, som for en Mathematiker er saa fristende som kun faa andre. Thi paa den ene Side fremkommer Problemet allerede paa det mest elementære Standpunkt, og paa den anden Side frembyder det saa store Vanskeligheder, at det kan have Tillokkelse nok for den største Analytiker. Mange ere derfor ogsaa de Forfattere, som fra Tid til anden have anstillet Undersøgelser vedrørende Primtallenes Fordeling[1]), og naar man blandt disse kan anføre Navne som Euler, Lambert, Legendre, Gauss, Dirichlet, Tchebycheff, Riemann, saa maa det næsten synes mærkeligt, at vort virkelige Kjendskab til Loven for Primtallenes Fordeling saa at sige endnu kun er af tilfældig Natur. Riemann er den eneste Forfatter, som med nogen Ret kan gjøre Fordring paa Æren af at have løst Problemet. I en Afhandling[2]), som trods sin korte og skitserede Form dog maa betegnes som en af den moderne Analyses ypperste Frembringelser, har han ganske vist gjengivet Loven exakt, men i en saadan Form, at det fundne Udtryk ikke lader sig anvende til nogen virkelig Beregning af Primtalmængden op til en given Grænse, ja neppe en Gang med Sikkerhed tør bruges til en tilnærmet Beregning af denne Størrelse. Men naar selv en Riemann ikke er naaet videre, saa maa dette enten ligge i selve Problemets Natur eller ogsaa i, at man ikke har anvendt de mest passende Midler til Problemets Løsning. Det vil derfor være hensigtsmæssigt, før vi gaa over til de specielle Undersøgelser, først at betragte Opgaven fra et mere almindeligt Synspunkt.

De mest elementære Betragtninger give Midler til sukcessive at udskille Primtallene af Talrækken og gjøre det indlysende, at Primtallenes Tæthed i det hele taget vil aftage, efterhaanden som man kommer længere frem i Talrækken. Ligeledes kan let vises, dels at Primtalmængden er uendelig, dels at Intervallet mellem to paa hinanden følgende Primtal kan blive saa stort, det skal være. Paa den anden Side ser man af Faktortavlerne, at der

---

[1]) En Fortegnelse over den herhen hørende Literatur findes i Glaisher's Factor table for the fourth Million. London 1879.

[2]) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Monatsber. der Berliner Akademie 1859.

selv blandt de største undersøgte Tal findes Primtalpar, hvis Interval kun er 2 Enheder, saa at Intervallet mellem to paa hinanden følgende Primtal i Nærheden af et givet Tal kan svinge mellem temmelig store Grænser. Den Funktion af x, som udtrykker Mængden af Primtal op til x inklusive — vi ville i det følgende betegne den ved $\theta(x)$ — vil derfor være en diskontinuert Funktion, som vel stadig voxende varierer med Spring af en Enhed, men hvor Afstanden mellem Springene vexler meget uregelmæssigt.

Hvis man nu ikke stillede andre Fordringer til det analytiske Udtryk for $\theta(x)$, end at Formlen skulde fremstille denne Funktion i en eller anden Form, saa vilde Problemet ikke være vanskeligt at løse. Med lidt Behændighed er det ikke vanskeligt at danne analytiske Udtryk f. Ex. i trigonometrisk Form, som blive 0, naar x er et sammensat Tal, 1, naar x er et Primtal, og ved saadanne kunde altsaa $\theta(x)$ fremstilles. Det vil til Bevis for denne Paastand være tilstrækkeligt at henvise dels til Ramus's Doktordisputats[1] («De functionum formis etc.»), dels til Prof. Lorenz' Artikel «Om Primtalrækken» i Tidsskrift for Mathematik 1878, eller til en Afhandling af Libri[2]), hvor lignende Former opstilles. Men Vanskeligheden kommer først frem, idet man tillige maa stille den Fordring, at den fundne Formel skal kunne bruges til Beregning af Funktionen $\theta(x)$. Thi derved viser det sig strax, at slige Former blive ubrugelige. Ja selv saadanne Midler som uendelige trigonometriske eller andre analoge Rækker, navnlig Udviklinger efter Kuglefunktioner, som bevislig kunne bruges til Udvikling af arbitrære Funktioner, og som ogsaa her kunne anvendes, ville ikke kunne tilfredsstille denne Fordring. Thi omend slige Rækker, fortsatte i det uendelige, kunne bruges — rent abstrakt taget — til Fremstilling af diskontinuerte Funktioner, saa ville de dog i Nærheden af et Diskontinuitetspunkt blive saa langsomt konvergerende, at det vilde blive et forgjæves Arbejde at summere dem, og naar tilmed som her Diskontinuitetspunkterne optræde i uendeligt Antal og fordelte over hele Talrækken, saa kan man neppe vente at finde en saadan Form, at den vilde vise sig skikket til numerisk Beregning selv for saadanne x, som ikke svare til Diskontinuitetspunkterne.

Noget mere kunde man vente sig af Benyttelsen af bestemte Integraler, det er ogsaa ved Hjælp af saadanne, at Riemann opnaar sine Resultater. Men ogsaa her fremkommer en lignende Vanskelighed som ovenfor paapeget, omend i en noget anden Form. Et Integral, som skal fremstille $\theta(x)$, maa nemlig ikke blot være diskontinuert, men da selve Primtallene ikke explicite maa indgaa i det, saa maa det fremtræde i en saadan Form, at Diskontinuiteten ikke tydelig træder frem. Allerede den Omstændighed, at Integralet fremstiller en diskontinuert Funktion, vanskeliggjør Beregningen, thi det medfører, dels at Integralets Elementer variere meget stærkt, og dels, at saadanne Rækkeudviklinger, f. Ex.

---

[1]) Ramus: Tentamen de functionum formis, originibus et variationibus. Hauniæ MDCCCXXXII.

[2]) Mémoire sur la théorie des nombres. Crelle's Journal Bd. 9.

for Faktorer under Integraltegnet, som i andre Tilfælde kunne anvendes med Held, her ikke kunne benyttes, da Diskontinuiteten derved enten kan gaa tabt eller i alt Fald fremtræde under ubestemt — altsaa ubrugelig — Form. Endnu vanskeligere bliver Forholdet, naar, som her, Beliggenheden af Diskontinuitetspunkterne er ubekjendt, thi man vil ved Beregning af saadanne diskontinuerte Integraler ofte have Lejlighed til at bemærke, at deres Bestemmelse lettest udføres ved Deling i kontinuerte Dele, altsaa netop ved at fremhæve Diskontinuiteten, og dette kan jo i dette Tilfælde ikke gjøres. De tilladelige Transformationer af Integralet blive derfor meget begrænsede og maa foretages med største Forsigtighed, hvis man skal undgaa at strande paa et af de mange Skjær, som en saadan Behandling frembyder. At Riemann har været i Stand til at gjennemføre sin Methode, er et glimrende Vidnesbyrd om hans Geni, men at hans Resultat ikke er bleven helt betydningsløst, beror paa, at det er muligt at dele Funktionen $\theta(x)$ i en Sum af to andre, af hvilke den første og væsentligste Del er kontinuert og lader sig fremstille i Form af en Række, der kan beregnes, medens den anden indeholder den diskontinuerte Korrektion, som skal anbringes derpaa for at faa den korrekte Værdi af $\theta(x)$. Denne Korrektion fremtræder i Form af en Sum af imaginære Integrallogarithmer, som afhænge af Rødderne i en transcendent Ligning. Disse Rødder ere uden Tvivl atter afhængige af de sukcessive Primtal, men selv om denne Afhængighed var fuldstændig udredet, vilde det være meget vanskeligt at afgjøre, om den Række, der gives for Korrektionen, er konvergent og i saa Fald at afgjøre, mellem hvilke Grænser dens Værdi ligger. Det er muligt, at fremtidige Undersøgelser kunne bringe større Klarhed til Veje paa dette Punkt, men en Sammenligning med de gjorte Optællinger viser, at den kontinuerte Del af Riemann's Formel giver en saa god Tilnærmelse til de virkelige Primtalmængder, at der ikke kan være Tvivl om, at den af Riemann angivne Formel giver et særdeles betydningsfuldt Vink om, hvilke Funktionsformer der skulle benyttes. Vil man nøjes med en Tilnærmelsesformel, vil der neppe kunne opnaas noget bedre Resultat end den kontinuerlige Del af Riemann's — naturligvis, naar man ikke vil benytte mere sammensatte Funktionsformer — men der maa rigtignok i saa Fald gives den en noget anden Begrundelse.

Forsaavidt man vil blive staaende ved Tilnærmelsesformler, kunde de saakaldte «Interpolationsrækker» her synes at være paa deres Plads. Dette er utvivlsomt ogsaa Tilfældet, men for at kunne bruges med Held, d. v. s., for at man kan nøjes med nogle faa Led i Rækken, er det nødvendigt, at man først har nogen Indsigt i Beskaffenheden af den Funktion, man vil udvikle. Thi kun i saa Fald er man i Stand til at vælge sine Udviklingsfunktioner paa den mest passende Maade. Og dette er nødvendigt, da Rækkerne i modsat Fald blive for lidet konvergente og paa sine Steder for meget afvigende fra de virkelige Værdier af $\theta(x)$. Og selv i heldigste Tilfælde give de kun et saa at sige udvortes Kjendskab til den Funktion, man udvikler, medens de Relationer, som i Virkeligheden betinge, at netop én bestemt og ikke nogen anden Funktionsform fremkommer, ikke ville findes ad denne Vej.

Af alle disse Grunde ville vi i den følgende Afhandling ikke nærmere forfølge nogen af de ovenomtalte Veje, men kun — væsentlig til Sammenligning og Orientering — give en Fremstilling af Riemann's Methode; derimod ville vi særlig benytte rent taltheoretiske Methoder for at se, hvorvidt man ad denne Vej kan naa. Disse Methoder synes i Virkeligheden at fortjene en noget større Opmærksomhed, end der hidtil er bleven skjænket dem.

Allerede Legendre har lært, hvorledes man ved Benyttelsen af Primtallene op til $\sqrt{x}$ kan finde Primtalmængden mellem $\sqrt{x}$ og x ved Hjælp af ufuldstændige Kvotienter, og Meissel har vist, at denne Beregning er praktisk udførlig selv for saa store Tal som 100 Millioner. En lignende Beregning er foretagen tidligere af Englænderen Hargreave og senere af en fransk Forfatter, Piarron de Mondesir. Det Held, disse Forfattere have haft, ligger uden Tvivl deri, at de have anvendt virkelig diskontinuerte Funktionsformer og navnlig saadanne, som væsentlig stemme med Problemets Natur. Russeren Bougaïeff er gaaet videre ad samme Vej og har angivet en Formel for selve $\theta(x)$. Formler af denne Art ere endnu langt fra at være det, man maatte ønske, og lade sig navnlig ikke direkte omdanne til analytiske Tilnærmelsesformler. Men de give en større Indsigt i den virkelige Natur af Funktionen $\theta(x)$ og de Relationer, som sammenknytte den med andre lignende, end de tidligere nævnte, og det er muligt, at fortsatte Undersøgelser af saadanne Former ogsaa ville kunne lede til Opstillingen af brugbare Tilnærmelsesformler. Et væsentligt Skridt i lignende Retning er paa et beslægtet Omraade gjort af Svenskeren Berger, der ved som Udgangspunkt at benytte en Formel, der oprindelig skyldes Dirichlet (Abhandlungen der Berliner Akademie 1849), er naaet til at opstille en Række mærkelige Formler, som angive Middelværdierne af visse symmetriske Funktioner af et Tals Divisorer. Analoge Betragtninger lade sig ogsaa anvende paa Primtallene, og ved at sammenknytte disse med visse Undersøgelser af Tchebycheff kan man paa en ret simpel Maade komme til en Bestemmelse af Primtallenes Middeltæthed og derigjennem atter til Tilnærmelsesformler for forskjellige Funktioner af Primtallene op til en given Grænse. Mærkeligt er det, at man ad denne Vej faar tilvejebragt en Forbindelse mellem to saa forskjellige Methoder som de af Tchebycheff og Riemann anvendte.

Uagtet denne Methode synes at give gode Løfter om et heldigt Resultat, er det dog ikke lykkedes mig at gjennemføre disse Undersøgelser paa den Maade, det var ønskeligt. Alligevel tror jeg dog, at denne Methode fortjener nogen Opmærksomhed, fordi den i Virkeligheden giver en Indsigt i det paagjældende Problems Natur som ingen af de andre, og fordi den rammer noget af det mest centrale i det. Og netop at forsøge paa at trænge ind til Problemets Kjærne har været Hovedformaalet for nærværende Arbejde. Vi have derfor fra først af stillet os paa det Standpunkt, i første Række at finde et exakt Udtryk for

Primtalmængden eller for dermed beslægtede Funktioner, medens Spørgsmaalet om Tilnærmelsesformler kun stilledes i anden Række.

Det er muligt, at man ved at stille sig paa det omvendte Standpunkt kunde have opnaaet tilsyneladende større Udbytte, men til Gjengjæld vilde den indbyrdes Sammenhæng mellem de forskjellige Betragtningsmaader neppe være traadt saa klart frem, som vi nu tro er Tilfældet.

---

§ 1. Symmetriske Funktioner af alle Primtallene.

Som Forberedelse til Studiet af Primtallenes Fordeling er det gavnligt at gjøre sig bekjendt med forskjellige Relationer mellem Funktioner af Primtallene og visse Funktioner af Tallene i den naturlige Talrække. Uagtet disse Relationer væsentlig tjene til Beregning af visse symmetriske Funktioner af alle Primtal og altsaa ikke direkte kunne benyttes, naar man kun medtager Primtallene op til en vis Grænse, saa spille de dog i alle Undersøgelser om Primtal en saa stor Rolle, at man altid maa have dem paa rede Haand. Vi ville derfor nedenfor samle disse under et, idet vi dog for Bevisernes Vedkommende i de fleste Tilfælde nøjes med Henvisninger til de Forfattere, hos hvem de findes. Et Primtal vil her som overalt i det følgende blive betegnet ved p, eller hvis der er flere saadanne, ved a, b, c o. s. v., og det bemærkes endvidere udtrykkeligt, at vi ikke medregne Tallet 1 iblandt Primtallene, saaledes som f. Ex. Glaisher gjør det.

Allerede Euler[1]) har undersøgt Produkter af Formen $\Pi\left(1-\frac{1}{p^r}\right)$, hvori p efterhaanden tillægges de Værdier, som angives ved Primtallene. Et saadant Produkt vil som bekjendt[2]) være konvergent, saafremt dette er Tilfældet med Rækken $\Sigma\frac{1}{p^r}$, altsaa, da $\Sigma\frac{1}{p^r} < \Sigma\frac{1}{n^r}$, hvor $n = 1, 2, 3$ o. s. v., i hvert Fald for $r > 1$. Udvikler man den reciproke Værdi af hver af Faktorerne i Række, faas

$$\left(1-\frac{1}{p^r}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{p^r}+\frac{1}{p^{2r}}+\frac{1}{p^{3r}}+\ldots,$$

og altsaa faar man, naar alle disse Faktorer multipliceres sammen, og Leddene ordnes efter deres Størrelse, en Række, der kan skrives som

---

[1]) Introductio in Analysin infinitorum Cap. XV.

[2]) Weierstrass: Theorie der analytischen Facultäten, Crelle's Journal Bd. 51.

$$s(r) = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots, \tag{1}$$

der er ubetinget konvergent, saalænge $r > 1$. Derfor bliver altsaa

$$\Pi\left(1 - \frac{1}{p^r}\right) = \frac{1}{s(r)}. \tag{2}$$

Den samme Ligning vil endnu gjælde for komplexe r, for saa vidt mod $r > 1$. Af denne følger atter ved paa begge Sider at tage Logarithmen og udvikle i Række

$$\Sigma \frac{1}{p^r} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{p^{2r}} + \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{1}{p^{3r}} + \ldots = l s(r) \quad \text{for} \quad r > 1, \tag{3}$$

og ligeledes ved Differentiation med Hensyn til r

$$\Sigma p^{-r} lp + \Sigma p^{-2r} lp + \Sigma p^{-3r} lp + \ldots = \frac{1}{s(r)} \sum_1^\infty n^{-r} ln = -\frac{s'(r)}{s(r)}, \tag{4}$$

der ogsaa kan skrives som

$$\Sigma(p^{-r} + p^{-2r} + \ldots) lp = \Sigma \frac{1}{p^r - 1} lp = -\frac{s'(r)}{s(r)}, \quad r > 1. \tag{4'}$$

Da man endvidere maa have

$$\Pi\left(1 - \frac{1}{p^r}\right) . \Pi\left(1 + \frac{1}{p^r}\right) = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^{2r}}\right),$$

saa kan ogsaa Værdien af Produkter af Formen $\Pi\left(1 + \frac{1}{p^r}\right)$ bestemmes ved Hjælp af de reciproke Potenssummer $s(r)$, for saa vidt mod $r > 1$. For $r = 1$ maa $\Pi\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ blive 0, eftersom den reciproke Værdi giver den harmoniske Række, Produktet $\Pi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ maa derfor blive uendeligt, og den Række, som faas ved at udføre Multiplikationen, divergent.

Udføres Multiplikationen af de enkelte Faktorer i Produktet $\Pi\left(1 - \frac{1}{p^r}\right)$, faas en Række, der kan skrives som

$$\Pi(1 - p^{-r}) = 1 - \Sigma a^{-r} + \Sigma a^{-r} b^{-r} - \Sigma a^{-r} b^{-r} c^{-r} + \ldots, \tag{5}$$

hvor $a, b, c \ldots$ betegne forskjellige Primtal. Da Rækken er ubetinget konvergent for $r > 1$, kunne Leddene i dette Tilfælde ordnes efter Størrelsen, hvorved faas

$$\Pi(1 - p^{-r}) = 1 - 2^{-r} - 3^{-r} - 5^{-r} + 6^{-r} - 7^{-r} + 10^{-r} - 11^{-r} \ldots = \frac{1}{s(r)}. \tag{6}$$

Man ser, at de enkelte Led indeholde $r$te Potens af saadanne Tal, som ikke ere delelige med noget Kvadrattal, og med Fortegnet $(-1)^m$, hvor m angiver Antallet af det paagjældende Tals Primfaktorer.

Betegner man altsaa ved $\mu(x)$ en Faktor, som for $x =$ et Primtal eller et Produkt af et ulige Antal forskjellige Primtal er lig -1, men for $x = 1$ eller et Produkt af et lige Antal forskjellige Primfaktorer er $+1$, i andre Tilfælde lig 0, saa kan (6) skrives som

$$\Pi(1 - p^{-r}) = \sum_1^\infty \mu(x) x^{-r} = \frac{1}{s(r)}. \tag{7}$$

Hvor vidt ogsaa denne Ligning vedbliver at gjælde for $r = 1$, altsaa om Rækken $\sum_1^\infty \mu(x) x^{-1}$ er konvergent, kan paa dette Stadium ikke afgjøres, senere skal dog vises, at den ialfald er endelig og < 1, naar den afbrydes ved et hvilket som helst Led. For øvrigt vil en numerisk Beregning vise, at dens numeriske Værdi hurtig nærmer sig stærkt til 0, og at den snart er positiv, snart negativ.

Euler har foruden de nævnte Relationer opstillet en hel Række andre, som dog ikke uden videre kunne bruges, da der ikke føres tilstrækkeligt Bevis for Konvergensen af de optrædende Produkter og Summer. Blandt disse kan f. Ex. anføres følgende:

$$\frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdots = \frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

Tællerne i de her optrædende Faktorer ere alle ulige Primtal, Nævnerne de nærmeste Multipla af 4, altsaa $p \pm 1$ eftersom $p = 4m \mp 1$. For denne Ligning er der senere givet et fuldstændigt Bevis af Mertens [1]). En anden er følgende:

$$\frac{5}{5+1} \cdot \frac{7}{7-1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \frac{17}{17+1} \cdots = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}, \tag{9}$$

hvori der kun indgaar Primtal af Formen $6n \pm 1$. Vi anføre disse Relationer, skjønt vi senere ikke gjøre nogen Brug af dem, fordi den første giver os Anledning til en Bemærkning. Det er klart, at alle ulige Primtal have Formen $4n+1$ eller $4n-1$, lad os antage, at alle Primtal fra en vis endelig Grænse q at regne havde kun en af disse Former, altsaa f. Ex. $4n+1$. Saa fik man, idet de foregaaende Faktorer samledes til en enkelt, A:

$$\frac{\pi}{4} = A \cdot \prod_q^\infty \frac{p}{p-1} = B \cdot \prod_2^\infty \frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

Men denne Ligning er umulig, eftersom B er en endelig Konstant, og det sidste Produkt har Værdien ∞. Vi lære heraf, at der maa være uendelig mange Primtal af Formen $4n+1$, og paa ganske tilsvarende Maade ses, at der ogsaa maa være uendelig mange af Formen $4n-1$, og vi faa altsaa herved et simpelt Bevis for et specielt Tilfælde af en af Dirichlet bevist almindelig Sætning.

De reciproke Potenssummer $s(r)$ af Tallene i den naturlige Talrække spille i mange Undersøgelser en stor Rolle. De, der svare til lige r, udtrykkes som bekjendt let ved de Bernoulli'ske Tal [2]), idet

$$s(2) = \frac{\pi^2}{6} = B_1 \pi^2; \quad s(4) = \frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{3} \cdot \pi^4 B_3; \quad s(6) = \frac{\pi^6}{945} = \frac{B_5}{[6]} \cdot 2^5 \pi^6, \tag{10}$$

almindelig

$$s(2m) = \frac{B_{2m-1}}{[2m]} \cdot 2^{2m-1} \pi^{2m}. \tag{10'}$$

[1]) Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Borchardt's Journal Bd. 78.

[2]) Se f. Ex. Schlömilch: Compendium der höh. Anal. I, S. 244.

For øvrigt ville de, for saa vidt man vil have de numeriske Værdier af dem, baade for r lige og r ulige, lettest og sikrest beregnes ved at udregne de enkelte Led. En saadan Tabel er givet af Legendre og er nedenfor meddelt i Tab. I.

Af Rækkeudviklinger, i hvilke disse Summer indgaa, mærkes især følgende:

$$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{1}{1}\frac{s_2 z^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{s_4 z^4}{\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{s_6 z^6}{\pi^6} \cdots, \quad (z^2 < \pi^2) \tag{11}$$

og de dermed nær beslægtede Tangens- og Secansrækker, samt

$$l\Gamma(1+z) = -Cz + \tfrac{1}{2}s_2 z^2 - \tfrac{1}{3}s_3 z^3 + \tfrac{1}{4}s_4 z^4 \ldots, \quad (z^2 < 1), \tag{12}$$

hvor vi, som ofte i det følgende, for Kortheds Skyld skrive s_r for $s(r)$, naar r er hel. Konstanten C er den Euler'ske Konstant 0·5772156..., som ogsaa staar i nær Forbindelse med de samme Summer, idet

$$C = \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{3}s_3 + \tfrac{1}{4}s_4 - \tfrac{1}{5}s_5 \ldots \tag{13}$$

Angaaende disse velbekjendte Ligninger henvises til Schlömilch's Compendium (lejlighedsvis skal her bemærkes, at Konstanten C_3 smstds. II, Side 254 er ukorrekt, den rigtige Værdi er 0·06735 230105).

Det vilde være af stor Betydning, hvis man kjendte en brugbar Rækkeudvikling for Funktionen $s(r)$. Dirichlet[1]) har ganske vist bevist, at $\rho . s(1+\rho) = 1 + (\rho)$, hvor (ρ) betegner en Størrelse, som forsvinder, naar $\rho = 0$, og herved er altsaa ialfald gjort det første Skridt i denne Retning, men saavidt mig bekjendt er ingen direkte gaaet videre paa dette Punkt.

Derimod haves vel et Udtryk ved et bestemt Integral[2]), idet almindelig for $r > 0$

$$[r]\, s(r+1) = \int_0^\infty \frac{z^r\, dz}{e^z - 1}, \tag{14}$$

hvoraf ses, at den nævnte Funktion staar i nogen Forbindelse med Γ-Funktionen. I sin ovennævnte Afhandling, «Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze», anvender Riemann et betydeligt Arbejde paa at finde et Udtryk for $s(r)$, som kan anvendes til videre Behandling og bruges ogsaa for imaginære r. Ved at gaa ud fra det ovennævnte Integral viser han først, at Funktionen $\Gamma(\frac{1}{2}r)\pi^{-\frac{1}{2}r}s(r)$ bliver uforandret, naar r ombyttes med $1-r$, og for særlig at drage Fordel af denne Egenskab, fremstiller han $s(r)$ ved Formlen

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}r)\pi^{-\frac{1}{2}r}s(r) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{r}{2}-1}\, dx, \tag{15}$$

hvor $\psi(x) = \sum\limits_1^\infty e^{-n^2\pi x}$. Idet han dernæst sætter $r = \frac{1}{2} + ti$ og

---

[1]) Se: Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von Dedekind. 3 Aufl. Supplement II.

[2]) Se f. Ex. Schlömilch, Comp. I, S. 430.

$$\xi(t) = \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)(r-1)\,\pi^{-\frac{r}{2}}\,s(r)\,, \tag{16}$$

kan $\xi(t)$ udtrykkes i Form af et bestemt Integral, der kan udvikles i Række efter Potenser af t^2. Derved ledes han til at indse Muligheden af at opløse $\xi(t)$ i et Produkt af Faktorer af Formen $1-\frac{t^2}{a^2}$, Gange en Konstant $\xi(0)$, og derved vil det i Virkeligheden atter blive muligt at udtrykke $s(r)$ som en Kvotient af Produkter med uendelig mange Faktorer eller med andre Ord at fremstille $ls(r)$ som en Sum af Logarithmer af lineære Faktorer, og det er netop dette, han specielt har Brug for. Men Udtrykket for $\xi(t)$ fremtræder under Formen

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\,(x^{\frac{3}{2}}\,\psi'(x))}{dx}\,x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\tfrac{1}{2}tlx\right)dx\,, \tag{17}$$

og at gjennemføre de antydede Regninger med Udvikling i Række efter Potenser af t samt Opløsning af den derved fremgaaende Ligning turde derfor vistnok være frugtesløst.

Forsaavidt man ikke vil fortsætte Rækkerne for $s(r)$ i det uendelige, men afbryde dem med Leddet n^{-r}, saa kunne Summerne bestemmes, idet man ved Hjælp af Stirling's Formel finder et Udtryk for Summen $\sum\limits_1^n x^{-r}$:

$$\sum_1^n x^{-r} = C - \frac{1}{r-1}n^{-r+1} + \frac{1}{2}n^{-r} - \frac{r}{12}n^{-r-1} + \ldots$$

Specielt mærkes for den harmoniske Række den bekjendte Ligning

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{x} = lx + C + \frac{1}{2x} - \frac{\theta}{12x^2}\,,\quad 0<\theta<1. \tag{18}$$

Et andet Udtryk haves ved Formlen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}l.\Gamma(x+1) + C\,, \tag{19}$$

hvor x maa være et helt Tal.

I Forbindelse hermed skal anføres, at

$$l.\Gamma(x+1) = x\,lx - x + \frac{1}{2}lx + l\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12x}\,,\quad \text{hvor } 0<\theta<1\,, \tag{20}$$

en Ligning, som vi i det følgende ofte faa Anvendelse for.

Foruden de her anførte symmetriske Funktioner af Primtal findes der hos enkelte Forfattere anført nogle andre Rækker, der afhænge af Primtal. Tchebycheff[1]) har f. Ex. bevist, at medens Rækken $\sum\frac{1}{nln}$ er divergent, saa er derimod $\sum\frac{1}{plp}$ endelig og mindre end 1·73[1]).

[1]) Mémoire sur les nombres premiers. Mém. de l'Académie de St. Pétersbourg T. VII, eller Liouville's Journal Tome 17 (1852).

§ 2. Nogle specielle Rækker. Möbius's Faktorer.

Foruden de anførte Rækker er der nogle andre, som staa i nær Forbindelse med disse, og som vi i det følgende stadig faa Brug for.

Vi saa ovenfor, at $\frac{1}{s_r} = \Pi(1-p^{-r})$ eller ifølge (7)

$$\sum_1^\infty x^{-r} \, . \sum_1^\infty \mu(x) x^{-r} = 1\,, \tag{21}$$

hvor $\mu(x)$ som anført er 1, naar x er et Produkt af et lige Antal forskjellige Primfaktorer, -1, naar dette Antal er ulige, og 0, naar x indeholder en kvadratisk Faktor. Denne Ligning beror i Virkeligheden paa en særegen Egenskab hos Faktorerne $\mu(x)$. Udfører man nemlig Multiplikationen direkte og opskriver Regningen saaledes:

$$\begin{array}{rcl}
s_r &=& 1 + 2^{-r} + 3^{-r} + 4^{-r} + 5^{-r} + 6^{-r} + \dots \\
-\,2^{-r} s_r &=& \quad\;\; -\,2^{-r} \qquad\quad -\,4^{-r} \qquad\quad -\,6^{-r} + \dots \\
-\,3^{-r} s_r &=& \qquad\qquad\quad -\,3^{-r} \qquad\qquad\quad\; -\,6^{-r} + \dots \\
-\,5^{-r} s_r &=& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\,5^{-r} \qquad\quad + \dots \\
+\,6^{-r} s_r &=& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; +\,6^{-r} + \dots \\
\text{o. s. v.} & &
\end{array}$$

saa ses, at alle Led af sig selv forsvinde ved Summationen undtagen det første. Dette hidrører fra, at naar D betegner en vilkaarlig Divisor i Tallet x, saa vil almindelig

$$\Sigma \mu(D) = 0\,, \tag{22}$$

naar Summen udstrækkes til alle Tallets Divisorer. Det er tilstrækkeligt at betragte de Divisorer, som ikke indeholde nogen kvadratisk Faktor, da μ for alle andre er 0. Naar da $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$, saa ville alle saadanne Divisorer og kun disse optræde som Led i Produktet $(1-a)(1-b)(1-c)\dots$, og Fortegnet for hvert enkelt Led vil netop blive den Værdi af μ, som svarer til den paagjældende Divisor. Erstattes altsaa $a, b, c \dots$ alle ved Tallet 1, saa bliver Produktet netop $\Sigma\mu(D) = 0$.

Denne Sætning er angivet af Möbius[1]), efter hvem vi benævne Faktorerne μ som «Möbius's Faktorer» Han har gjort en betydningsfuld Anvendelse af dem til Opløsning af særegne Systemer af Ligninger. Haves nemlig mellem to Systemer af Funktioner, X_r og Y_r, Relationer af Formen

$$\left.\begin{array}{l}
Y_1 = \Sigma X_r = X_1 + X_2 + X_3 + \dots \\
Y_2 = \Sigma X_{2r} = X_2 + X_4 + X_6 + \dots \\
Y_3 = \Sigma X_{3r} = X_3 + X_6 + X_9 + \dots
\end{array}\right\} \tag{23}$$

o. s. v.,

---

[1]) Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen. Crelle's Journal Bd. 9, S. 105.

saa findes deraf ved Hjælp af Faktorerne μ

$$X_1 = \Sigma\mu(r)Y(r), \quad X_2 = \Sigma\mu(2r)Y(2r), \quad X_3 = \Sigma\mu(3r)Y(3r)\ldots, \tag{24}$$

naturligvis under Forudsætning af, at de paagjældende Rækker, hvis de skulle fortsættes i det uendelige, ere konvergente.

Betydningen af det her omtalte vil bedst ses af nogle Exempler.

Ex. 1 (efter Möbius). Af Rækken

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{25}$$

faas

$$x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6}\ldots, \tag{26}$$

som er konvergent for $x < 1$. Sætter man $x = \frac{1}{v}$, faas heraf, idet $v > 1$,

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v^2-1} - \frac{1}{v^3-1} - \frac{1}{v^5-1} + \frac{1}{v^6-1}\ldots,$$

og for $v = 1 + w$ og efter Multiplikation med w faas atter

$$\frac{w}{1+w} = \frac{w}{(1+w)-1} - \frac{w}{(1+w)^2-1} - \frac{w}{(1+w)^3-1} - \frac{w}{(1+w)^5-1} + \frac{w}{(1+w)^6-1}\ldots \tag{27}$$

Gaar man her til Grænsen og antager w uendelig lille, gaar denne atter over til følgende

$$0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\ldots = \sum_1^\infty \mu(x)\cdot\frac{1}{x}. \tag{28}$$

Forsaavidt nu det var godtgjort, at den her optrædende Række er konvergent, saa vil dens Sum altsaa blive Nul. Forudsat at dette virkelig finder Sted, saa vilde man ogsaa ved Multiplikation med lz og Overgang til Exponentialfunktioner faa, at

$$1 = z\,.\,z^{-\frac{1}{2}}\,.\,z^{-\frac{1}{3}}\,.\,z^{-\frac{1}{5}}\,.\,z^{-\frac{1}{6}}\ldots \tag{29}$$

Ligesaa vilde man af Rækken for $-l(1-x)$ finde følgende nye Række

$$x = -l(1-x) + \tfrac{1}{2}l(1-x^2) + \tfrac{1}{3}l(1-x^3)\ldots \qquad (x < 1). \tag{30}$$

Sætter man atter heri $x = 1 - z$, faas

$$1 - z = -lz + \tfrac{1}{2}l(1-(1-z)^2) + \tfrac{1}{3}l(1-(1-z)^3)\ldots,$$

og antager man z uendelig lille, kan denne atter skrives

$$e^{1-z} = z^{-1}\,.\,(2z)^{\frac{1}{2}}\,.\,(3z)^{\frac{1}{3}}\,.\,(5z)^{\frac{1}{5}}\,.\,(6z)^{-\frac{1}{6}}\ldots = (z^{-1}\,.\,z^{\frac{1}{2}}\,.\,z^{\frac{1}{3}}\ldots)\,.\,(2^{\frac{1}{2}}\,.\,3^{\frac{1}{3}}\,.\,5^{\frac{1}{5}}\,.\,6^{-\frac{1}{6}}\ldots). \tag{31}$$

Da den første Faktor i det sidst anførte Produkt nærmer sig til 1, saa bliver altsaa den anden Faktor e^{1-z} eller, da z er uendelig lille,

$$2^{\frac{1}{2}}\,.\,3^{\frac{1}{3}}\,.\,5^{\frac{1}{5}}\,.\,6^{-\frac{1}{6}}\ldots = e, \tag{32}$$

der ogsaa kan skrives som

$$\tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{1}{3}l3 + \tfrac{1}{5}l5 - \tfrac{1}{6}l6 + \tfrac{1}{7}l7\ldots = 1. \tag{33}$$

Vi have anført disse Udviklinger, som findes hos Möbius, fordi de trods de mangelfulde Beviser dog have en ikke ringe Interesse, og de vistnok ved fornyede Undersøgelser ville vise sig rigtige. Vi have forsøgt at finde Grænser for de Fejl, som begaas ved at afbryde Rækkerne ved et vilkaarligt Led, men disse Grænser ere, naar undtages for den første Række for x (26), ikke snævre nok til at have nogen Betydning.

Ex. 2. Vi have ovenfor vist i (3), at $ls_r = \Sigma p^{-r} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2r} + \frac{1}{3}\Sigma p^{-3r} + \ldots$ Ved at vende denne Ligning om, erholdes

$$\Sigma p^{-r} = ls_r - \tfrac{1}{2}ls_{2r} - \tfrac{1}{3}ls_{3r} - \tfrac{1}{5}ls_{5r} + \tfrac{1}{6}ls_{6r} \ldots = \Sigma \frac{1}{i}\mu(i)\, s_{ir}. \tag{34}$$

Da ls_m for store m nærmer sig meget stærkt til 2^{-m}, saa bliver denne Række stærkt konvergent og kan derfor bekvemt bruges til Beregning af de numeriske Værdier af reciproke Potenssummer for Primtal. Paa denne Maade er Ligningen anvendt af Merrifield [1]).

For $r = 1$ kan Σp^{-r} vel findes paa denne Maade, men denne Sum viser sig at være uendelig. Mertens har derfor forsøgt at finde en Tilnærmelsesformel for $\sum\limits_2^G p^{-1}$, hvor G er en vilkaarlig valgt højere Grænse. Han finder i den anførte Afhandling [2])

$$\sum_1^G \frac{1}{p} = ll.G + C - H + \delta, \tag{35}$$

hvor C er den Eulerske Konstant, H en anden Konstant, bestemt ved, at

$$H = \tfrac{1}{2}ls_2 + \tfrac{1}{3}ls_3 + \tfrac{1}{5}ls_5 - \tfrac{1}{6}ls_6 \ldots = \sum_2^\infty \frac{\mu(r)}{r}\, ls(r), \tag{36}$$

medens δ ligger imellem Grænserne

$$\pm\left[\frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{GlG}\right]. \tag{37}$$

Ex. 3. Af Rækken

$$F(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}f(x^{\frac{1}{3}}) + \tfrac{1}{4}f(x^{\frac{1}{4}}) + \ldots \tag{38}$$

findes ved Omvending, at

$$f(x) = F(x) - \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) \ldots \tag{39}$$

Er specielt $F(x) = (lx)^r$, saa er altsaa ogsaa

$$f(x) = (lx)^r - \frac{1}{2}\cdot 2^{-r}(lx)^r - \frac{1}{3}\cdot 3^{-r}(lx)^r \ldots = (lx)^r\cdot[1 - 2^{-(r+1)} - 3^{-(r+1)} \ldots] = \frac{1}{s_{r+1}}(lx)^r.$$

Hvis derfor $F(x)$ kan udvikles i Række efter stigende Potenser af lx, saa vil det samme være Tilfældet med $f(x)$, og

$$F(x) = a\,lx + b\,(lx)^2 + c\,(lx)^3 + \ldots \tag{40}$$

giver

$$f(x) = \frac{a}{s_2}lx + \frac{b}{s_3}(lx)^2 + \frac{c}{s_4}(lx)^3 + \ldots, \tag{41}$$

som vil være konvergent, hvis Rækken for $F(x)$ er det.

---

1) Proceedings of the Royal Society of London. Vol. XXXIII. 1881.

2) Borchardt's Journal Bd. 78.

Ex. 4. Ved Anvendelse af Möbius's Faktorer lader der sig ogsaa udlede adskillige Resultater om endelige Rækker. Betegner man f. Ex. ved $F(x)$ den diskontinuerte Funktion

$$F(x) = 1 - 2^{-r} - 3^{-r} - 5^{-r} + 6^{-r} \ldots + \mu(x) \,.\, x^{-r} = \sum_1^x \mu(x) x^{-r}, \qquad (42)$$

og ved $E\frac{x}{m}$ det største hele Tal i Kvotienten $\frac{x}{m}$, saa haves

$$F(x) + 2^{-r} F\left(E\tfrac{x}{2}\right) + 3^{-r} F\left(E\tfrac{x}{3}\right) + \ldots + x^{-r} F(1) = 1, \qquad (43)$$

eller, som den ogsaa kan skrives, $\sum_1^x m^{-r} F\left(\frac{x}{m}\right) = 1$. Er specielt $r = 0$, og sættes $\sum_1^x \mu(x) = M(x)$, saa bliver altsaa

$$M(x) + M\left(\tfrac{x}{2}\right) + M\left(\tfrac{x}{3}\right) + \ldots M(1) = 1. \qquad (44)$$

Ex. 5. Et noget lignende Tilfælde er følgende. Man skal bestemme Funktionen $f(n)$ saaledes, at for alle n haves (idet n er et helt Tal)

$$n = f(n) + f\left(E\tfrac{n}{2}\right) + f\left(E\tfrac{n}{3}\right) + \ldots f\left(E\tfrac{n}{n}\right) = \sum_1^n f\left(E\tfrac{n}{x}\right). \qquad (45)$$

Ved Anvendelse af Möbius's Faktorer faas heraf ved efterhaanden at sætte $E\frac{n}{2}$, $E\frac{n}{3}$ o. s. v. for n

$$f(n) = n - E\frac{n}{2} - E\frac{n}{3} - E\frac{n}{5} + E\frac{n}{6} \ldots = \sum_1^n \mu(x)\, E\frac{n}{x}.$$

Det er imidlertid let at se ved sukcessiv Beregning af $f(1)$, $f(2) \ldots$, at $f(x) = 1$, saa at altsaa almindelig haves

$$\sum_1^n \mu(x)\, E\frac{n}{x} = 1. \qquad (46)$$

Sættes heri $E\frac{n}{x} = \frac{n}{x} - r_x$, hvor r_x er en positiv ægte Brøk, saa faas

$$1 = n \sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} - \sum_1^n \mu(x) r_x = n \sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} - R_1(n) + R_2(n), \qquad (47)$$

hvor $R_1(n)$ betegner Summen af de Led, $\mu(x)\, r_x$, som have positive Fortegn, $R_2(n)$ Summen af dem med negative. Altsaa bliver endelig

$$\sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{n} + \frac{R_1(n)}{n} - \frac{R_2(n)}{n}. \qquad (47')$$

Da de to Restled optræde med modsatte Fortegn, er det at vente, at de omtrent ville ophæve hinanden, saa at $\frac{1}{n}$ vil angive den omtrentlige Værdi af Rækken. Absolute Grænser for Afvigelserne faas ved at bemærke, at $R_1(n) < \Sigma(+\mu)$ (ɔ: Summen af positive μ), og $R_2(n) < \Sigma(-\mu)$, saa at man faar

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_2^n (-\mu) < \sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_2^n (+\mu). \qquad (48)$$

Vi se heraf, at Rækken $\sum\limits_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{n} \pm \lambda$, hvor λ i ethvert Fald er en ægte Brøk. Rækken (28) kan derfor, fortsat i det uendelige, ikke divergere, men maa enten være konvergent eller oscillere mellem endelige Grænser.

---

§ 3. Bestemmelse af $\theta(x)$ ved bestemte Integraler. Riemann's Formel.

Naar man ved $\pi(x)$ betegner en Funktion, som har Værdien 1, naar x er et Primtal, og 0, naar x er et sammensat Tal, saa kunne Formlerne

$$-\frac{s'(r)}{s(r)} = \Sigma \frac{1}{p^r - 1} lp \quad \text{og} \quad ls(r) = -\Sigma l(1 - p^{-r})$$

skrives som henholdsvis

$$-\frac{s'(r)}{s(r)} = \sum_1^\infty \pi(x) \frac{lx}{x^r - 1} \tag{48}$$

og

$$ls(r) = -\sum_1^\infty \pi(x) l(1 - x^{-r}). \tag{49}$$

Den sidste kan ogsaa skrives

$$ls(r) = \sum_1^\infty \pi(x) (x^{-r} + \tfrac{1}{2} x^{-2r} + \tfrac{1}{3} x^{-3r} + \ldots)$$

eller, naar man ved $\tilde{\omega}(x)$ betegner en Funktion, som er 1, naar $x = p$, $\frac{1}{2}$ for $x = p^2$, almindelig $\frac{1}{n}$, naar $x = p^n$, men 0, naar $x = 1$ eller sammensat af forskjellige Primfaktorer,

$$ls(r) = \sum_1^\infty \tilde{\omega}(x) x^{-r}. \tag{50}$$

Enhver af disse tre Ligninger (48) — (50) indeholder implicite en Definition paa de deri optrædende Funktioner $\pi(x)$ og $\tilde{\omega}(x)$, og da de gjælde for uendelig mange Værdier af r, saa maa det være muligt at udføre Bestemmelsen af disse Funktioner af de nævnte Ligninger. Paa Grund af Vanskeligheden ved at operere med saadanne Summer vil det imidlertid være hensigtsmæssigt at søge at sætte Integraler i Stedet for dem. Navnlig den sidste Form (50) tillader let en saadan Omdannelse, idet x^{-r} erstattes ved $r\int_x^\infty z^{-r-1} dz$. Derved faas

$$\frac{1}{r} ls(r) = \sum_1^\infty \tilde{\omega}(x) \int_x^\infty z^{-r-1} dz. \tag{51}$$

Men nu er

$$\tilde{\omega}(1)\int_1^\infty + \tilde{\omega}(2)\int_2^\infty + \tilde{\omega}(3)\int_3^\infty \ldots = \tilde{\omega}(1)\int_1^2 + (\tilde{\omega}(1) + \tilde{\omega}(2))\int_2^3 + (\tilde{\omega}(1) + \tilde{\omega}(2) + \tilde{\omega}(3))\int_3^4 + \ldots$$

Betegner man altsaa Summen $\tilde{\omega}(1) + \tilde{\omega}(2) + \tilde{\omega}(3) + \ldots \tilde{\omega}(x)$ ved $f(x)$, saa faas, idet $f(x)$ er en diskontinuert Funktion, som ikke varierer, undtagen naar x passerer en Potens af et Primtal, at

$$\frac{1}{r}\, l\, s(r) = \sum_1^\infty f(x)\int_x^{x+1} z^{-r-1} dz = \sum_1^\infty \int_x^{x+1} f(z)\, z^{-r-1} dz = \int_1^\infty f(z)\, z^{-r-1} dz. \tag{52}$$

Funktionen $f(x)$ vil angive Antallet af Primtal op til x + det halve Antal Primtalkvadrater + $\frac{1}{3}$ af Antallet af Primtalkuber o. s. v. op til x.

Udtrykt ved $\theta(x)$, Mængden af Primtal op til x (inkl.), skal $f(x)$ altsaa være lig med

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots \tag{53}$$

Vi bruge i det følgende for dette Tal Benævnelsen: «Antallet af dividerede Primtalpotenser», idet hver enkelt Potens af et Primtal i dette Antal kun skal tælles som 1 divideret med Exponenten. Det erindres, at Tallet 1 ikke er medregnet i $\theta(x)$ og altsaa heller ikke i $\vartheta(x)$. Forsaavidt nu $f(x)$ bestemmes af den ovenstaaende Formel under entydig Form, saa vil i Diskontinuitetspunkterne $f(x)$ ikke kunne falde sammen med $\vartheta(x)$, men maa i disse Punkter angive en Middelværdi mellem $\vartheta(x+0)$ og $\vartheta(x-0)$. Derimod er der ikke noget til Hinder for fuldstændig Overensstemmelse i alle andre Punkter.

For af Formlen (52) at bestemme $f(x)$ anvender Riemann[1]) følgende Sætning, som bevises ved Hjælp af Fourier'ske Integraler: Naar, idet $s = a + bi$, hvor $a > 1$,

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)\, x^{-r}\, d\, l x\,,$$

saa er ogsaa

$$2\pi i\, h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)\, y^s ds\,,$$

og ved Anvendelse af denne fremkommer derefter Udtrykket for $f(x)$ under Formen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{r}\, l\, s(r)\, x^r dr\,, \tag{54}$$

og der staar derefter kun tilbage at omdanne dette Integral til en mere handelig Form.

Skjønt Riemann's Udledning af denne Formel baade er elegant og ikke egentlig

[1]) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Monatsber. der Berl. Akad. 1859, eller Riemann's Gesammelte mathematische Werke S. 136.

vanskelig, tro vi dog, at det vil være ret oplysende at vise, hvorledes den samme Formel mere direkte lader sig udlede ad en anden Vej, hvorved det tydeligere ses, at Integralet virkelig fremstiller den søgte Funktion.

Som bekjendt er[1])

$$\int_0^\infty \frac{z \sin bz + k \cos bz}{k^2+z^2}\,dz = \begin{cases} \pi e^{-bk} & \text{for } b > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } b = 0, \\ 0 & \text{for } b < 0. \end{cases} \tag{55}$$

k er her en vilkaarlig positiv Konstant. Sættes $b = l\frac{x}{p^n}$, saa er altsaa

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{p^n}\right)^k \int_0^\infty \frac{z \sin z\, l\frac{x}{p^n} + k \cos z\, l\frac{x}{p^n}}{k^2+z^2}\,dz = \begin{cases} 1 & \text{for } lx > lp^n, \\ \frac{1}{2} & \text{for } lx = lp^n, \\ 0 & \text{for } lx < lp^n, \end{cases} \tag{56}$$

og fremstiller altsaa en diskontinuert Funktion, der er lig 0, saalænge til x, varierende fra 1 til ∞, passerer p^n, og derefter er lig 1. Indføres Exponentialfunktioner for de trigonometriske, saa kan Integralet ændres til

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{k+zi}\left(\frac{x}{p^n}\right)^{k+zi} + \frac{1}{k-zi}\left(\frac{x}{p^n}\right)^{k-zi}\right)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k+zi}\,\frac{x^{k+zi}}{p^{n(k+zi)}}\,dz. \tag{56'}$$

Divideres dette med n, faas en Funktion, som er 0, indtil x passerer p^n, og derefter er lig $\frac{1}{n}$; for $x = p^n$ er den lig $\frac{1}{2n}$. Indsættes nu for p efterhaanden alle Primtal, for Exponenten n alle hele Tal fra 1 og opad og summeres, faas altsaa et Udtryk for Antallet af dividerede Primtalpotenser op til x. Kun hvis x er en Potens af et Primtal, faas ikke selve $\vartheta(x)$, men $\frac{1}{2}(\vartheta(x-0) + \vartheta(x+0))$. Men ved Additionen faas under Integraltegnet $\frac{x^{k+zi}}{k+zi}$, multipliceret med en Række af Formen

$$\Sigma p^{-(k+zi)} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2(k+zi)} + \frac{1}{3}\Sigma p^{-3(k+zi)} + \dots$$

Men denne Række er for $k > 1$ konvergent, og dens Sum lig $l.s(k+zi)$, og altsaa faas, at Integralet

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{k+zi}}{k+zi}\, l.s(k+zi)\,dz \tag{57}$$

vil fremstille Funktionen $\vartheta(x)$, undtagen i selve Diskontinuitetspunkterne, for saa vidt k er

[1]) Se f. Ex. Riemann: Partielle Differentialgleichungen, herausgeg. von Hattendorff, S. 33, eller G. F. Meyer: Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale S. 197.

en positiv Konstant, der er > 1. Men dette Integral er netop identisk med Riemann's, hvilket strax ses ved at sætte $r = k + zi$.

Integralet (56′), hvorfra vi gik ud, er et specielt Tilfælde af en anden lidt almindeligere Form, som vi nu ville udvikle, da Riemann gjør en udstrakt Brug af den ved Transformationen af Integralet for $f(x)$. Erstatter man nemlig $k + zi$ ved Differensen $(a-b)+(z-y)i$, hvor a, b, z, y ere reelle og $a > b$, saa faas [1])

$$2\pi x^{-k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{zi}}{k+zi} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{(z-y)i}}{(a-b)+(z-y)i} dz,$$

eller, naar man sætter $a + zi = r$, $b + yi = \beta$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{zi}}{r-\beta} dz = 2\pi x^{-k} . x^{yi}.$$

Multipliceres paa begge Sider med x^a, faas altsaa almindelig, idet x antages > 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r-\beta} dz = \frac{1}{i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^r}{r-\beta} dr = 2\pi x^{\beta}, \tag{58}$$

hvor r og β ere komplexe Tal, og den reelle Del af r er større end den reelle Del af β. I denne Form (med Ombytning af r med s) benyttes Ligningen af Riemann, der dog ved en eller anden Uagtsomhed har faaet et urigtigt Fortegn paa den ene Side af Ligningen. Ved Differentiation med Hensyn til β fremgaar atter heraf følgende Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{(r-\beta)^2} dz = \frac{1}{i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^r}{(r-\beta)^2} dr = 2\pi x^{\beta} l x, \tag{59}$$

eller for $\beta = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r^2} dz = 2\pi l x. \tag{60}$$

Man ser let, hvorledes man ved Benyttelsen af de her angivne Integralformer kan sammensætte Integraler, som give symmetriske Funktioner af Primtallene op til x, idet man for x sætter $\frac{x}{p}$ og summerer for alle Primtal. Men alle disse Integraler faa væsentlig lignende Form som det Riemannske Integral for $f(x)$ og frembyde altsaa de samme Vanskeligheder som dette. Flere af disse Relationer ere imidlertid ikke uden Interesse. Vi anføre blandt dem følgende:

$$\int \frac{x^r}{r-1} l s(r) dz = \int \left(\Sigma \left(\frac{x}{p}\right)^r + \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{x}{p^2}\right)^r + \ldots \right) \frac{dz}{r-1} = 2\pi x \left[\overset{(x)}{\Sigma} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \overset{(x)}{\Sigma} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3} \overset{(x)}{\Sigma} \frac{1}{p^3} \ldots \right], \tag{61}$$

hvor alle Nævnerne paa højre Side skulle være $\overline{\gtrless}\, x$, den reelle Del af $r > 1$;

---

[1]) Jvfr. Meyer: Bestimmte Integrale, S. 196.

$$\int \frac{x^r}{r^2}\, ls(r)\, dz = 2\pi \left[\overset{(x)}{\Sigma} l\frac{x}{p} + \frac{1}{2} \overset{(x)}{\Sigma} l\frac{x}{p^2} + \ldots \right] = 2\pi [\vartheta(x)\, lx - \psi(x)]\,, \tag{62}$$

hvor $\psi(x)$ betegner $\overset{p \leq x}{\Sigma}\, lp + \overset{p \leq \sqrt{x}}{\Sigma}\, lp + \overset{p \leq \sqrt[3]{x}}{\Sigma}\, lp + \ldots$;

$$\int \frac{x^r}{r}\, s(r)\, dz = 2\pi E x\,, \tag{63}$$

$$\int \frac{x^r s(r)}{r-1}\, dz = 2\pi x \sum_1^x \frac{1}{n}\,; \tag{64}$$

ligesaa

$$\int \frac{\Sigma \mu(x) \left(\frac{x}{n}\right)^r}{r-1}\, dz = \int \frac{x^r}{(r-1)\, s(r)}\, dz = 2\pi x \sum_1^x \mu(n) \frac{1}{n}\,, \tag{65}$$

og

$$\int \frac{x^r}{r\, s(r)}\, dz = 2\pi \sum_1^x \mu(n). \tag{66}$$

Integrationsgrænserne ere i alle disse Integraler $-\infty$ til $+\infty$.

Paa samme Maade kan man ogsaa indse Rigtigheden af Formlen $\left(D_r = \frac{d}{dr}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \left(\frac{1}{r}\, ls(r)\right) dz = -2\pi\, lx\,.f(x). \tag{67}$$

Denne kan ogsaa let findes ved delvis Integration af det Riemannske Integral (54). Paa denne Maade er den udledt af Riemann, som derefter lægger den til Grund for den videre Behandling af sin Formel. Det vil ikke være overflødigt at vise, hvorledes Riemann gaar frem ved denne Behandling, da Genocchi i sin Redegjørelse for Riemann's Fremgangsmaade [1]) her afviger lidt fra R. Vi skulle i det følgende saa nær som muligt følge R.'s originale Methode, idet vi kun tilføje de Mellemled, som han har anset for unødvendige.

Ved den videre Omdannelse af det ovenstaaende Integral kan man ikke benytte sig af Rækkeudvikling for x^r efter Potenser af r, da — bortset fra andre Omstændigheder — Diskontinuiteten derved vilde gaa tabt. Man er derfor alene henvist til at omdanne $ls(r)$ til en eller anden Række, hvilket atter vil være ensbetydende med at udvikle $s(r)$ i et Produkt af Faktorer. Vi have ovenfor anført, at det kan vises, at naar $r = \frac{1}{2} + ti$, saa er

$$\pi^{-\frac{r}{2}} (r-1)\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) s(r) = \xi(t) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right)}{dx}\, x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}\, tlx\right) dx\,,$$

---

[1]) A. Genocchi: Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite, Annali di matematica da B. Tortolini T. III, p. 52.

hvor $\psi(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}$, og hvor $\xi(t)$ fremstiller en Funktion, der altid er endelig og kan udvikles i en konvergent Række efter Potenser af t^2. $\xi(t)$ vil derfor kunne fremstilles under Formen

$$\xi(t) = \xi(0) \,.\, \Pi\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right), \tag{68}$$

hvor $\xi(0)$ er en Konstant, og Størrelserne α betegne Rødderne i $\xi(t) = 0$. Den imaginære Del af Rødderne α er stedse beliggende mellem Grænserne $\pm \frac{1}{2} i$, men er sandsynligvis lig 0, saa at alle disse Rødder ere reelle. Fremstillingen af denne Formel er et Hovedpunkt i Riemann's Afhandling, men skjønt de af selve R. saavelsom af Genocchi givne Udviklinger ere fuldstændig tilstrækkelige til at paavise Formlens formelle Gyldighed ialfald for $r > 1$, forekommer der mig dog at hvile nogen Uklarhed over dennes egentlige Beskaffenhed. Dette har naturligvis sin væsentlige Grund deri, at selve Rødderne α ere ubekjendte. At finde disse Rødder ved Udvikling af $\xi(t)$ i Række efter Potenser af t og Opløsning af den derved fremkommende Ligning $\xi(t) = 0$ synes at være et haabløst Arbejde, og der vilde altsaa ikke være andet at gjøre end at forsøge paa at finde disse Rødder ad indirekte Vej. Det er ret rimeligt, at de maa paa en simpel Maade afhænge af Tallene i den naturlige Talrække eller maaske endog af Primtallene, men det er ikke lykkedes mig at vinde Klarhed over dette vigtige Punkt.

Det synes ogsaa at være noget kunstigt at indføre den nye variable t. Det er naturligvis sket for at fremhæve, at $\xi(t)$ er en lige Funktion af t, altsaa af $r - \frac{1}{2}$, men det mærkeligste er, at ved den videre Udvikling maa man igjen indføre selve r. Man faar nemlig ganske vist først

$$ls(r) = \frac{r}{2} l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) + \Sigma_\alpha l\left(1 + \frac{\left(r - \frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right) + l\xi(0), \tag{69}$$

hvor alle de enkelte Led undtagen det første og det sidste kunne udtrykkes ved Elementer af Formen $l(a + br)$, og netop denne Form er for Beregningen af Integralet særlig bekvem, men betragter man et enkelt Led i Summen Σ_α, saa faas

$$l\left(1 + \frac{\left(r - \frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right) = l\left(\alpha^2 + \left(r - \frac{1}{2}\right)^2\right) - l\alpha^2 = l\left(\frac{1}{2} - r + \alpha i\right) + l\left(\frac{1}{2} - r - \alpha i\right) - l\alpha^2$$
$$= l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right) + l\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right) - l\alpha^2.$$

Summen Σ_α kan derfor skrives som

$$\Sigma\left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right)\right) + \Sigma l\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right) - \Sigma l\alpha^2. \tag{70}$$

Men nu er

$$\Sigma l\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right) - \Sigma l\alpha^2 = \Sigma l\left(1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right) = l\frac{\xi\left(\frac{1}{2}i\right)}{\xi(0)} = l\xi\left(\frac{1}{2}i\right) - l\xi(0),$$

og Følgen heraf bliver, at $l\xi(0)$ helt forsvinder af Formlen for $ls(r)$ og bliver erstattet ved den nye Konstant $l\xi\left(\frac{1}{2}i\right)$. Værdien af denne Konstant kan let angives, idet man som et andet Udtryk for $\xi(t)$ har

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}\, t\, lx\right) dx\,, \tag{71}$$

og sættes her $t = \frac{1}{2}i$, faas $\xi\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}$. Herefter findes altsaa endelig for $ls(r)$ følgende Udtryk

$$ls(r) = \frac{r}{2}\, l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) + \Sigma_\alpha\left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)\right) - l2, \tag{72}$$

og dette Udtryk er det, som skal indsættes i Integralformlen. Man ser deraf, at $l\xi(0)$ helt forsvinder og erstattes ved $-l2$, og faar derved en Bekræftelse paa, at Genocchi's Resultat er det rigtige, medens Riemann har begaaet en Uagtsomhed.

Vi se tillige, at Størrelserne $\frac{1}{2} \pm \alpha i$ netop maa blive Rødderne i $s(r) = 0$, forsaavidt de ikke tillige kunne gjøre Faktorerne $\pi^{-\frac{r}{2}}(r-1)\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)$ til 0, og hvad der ved Riemann's Fremgangsmaade er vundet, er altsaa den Indsigt, at disse Rødder ere af Formen $\frac{1}{2} \pm \alpha i$ og derfor stedse optræde parvis.

Vi skulle derefter indsætte det fundne Udtryk for $ls(r)$ i Formlen (67), som giver

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi\, lx}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r\left(\frac{1}{r}\, ls(r)\right) dz\,,$$

og integrere Led for Led. Tages altsaa først det første Led i (72), saa giver dette som tilsvarende Led i $f(x)$, idet Integrationsgrænserne erindres at være $-\infty$ til $+\infty$,

$$f_1 = -\frac{1}{2\pi\, lx}\int x^r \,.\, 0\, dz = 0\,,$$

saa at dette Led slet ingen Indflydelse faar. Betragte vi dernæst det sidste Led $-l2$, saa giver dette ifølge (60)

$$f_5 = -\frac{1}{2\pi\, lx}\int \frac{x^r}{r^2}\, l2\, dz = -l2\,,$$

og saaledes vil overhovedet et konstant Led i $s(r)$ give det samme konstante Led i $f(x)$.

Vi betragte dernæst det Led, som efter disse give det simpleste Resultat, nemlig Γ-Funktionen. Ifølge Gauss[1]) haves

$$\Gamma(1+z) = \mathrm{Lim}_m \frac{m^z}{\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{m}\right)}\,, \quad \text{for } m = \infty\,,$$

[1]) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}\, x + \text{etc.}$

hvorefter atter

$$-l\,.\,\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right) = \operatorname{Lim} \sum_{n=1}^{n=m}\left(l\left(1+\frac{r}{2n}\right)-\frac{r}{2}lm\right), \quad \text{for } m=\infty,$$

og vi maa altsaa søge en Række enkelte Integraler af Formen

$$\int x^r D_r \frac{1}{r}\, l\left(1+\frac{r}{2n}\right) dz - \int x^r D_r\left(\frac{1}{r}\,\frac{r}{2}lm\right) dz.$$

Af disse to forsvinder det sidste, saa at kun det første bliver tilbage. Dette kan betragtes som specielt Tilfælde af det almindeligere Integral

$$B(x) = \int x^r D_r \frac{1}{r}\, l\left(1-\frac{r}{\beta}\right) dz. \tag{73}$$

For at finde dette, differentiere vi med Hensyn til β, hvorved faas

$$\frac{dB(x)}{d\beta} = \int x^r D_r \frac{1}{r}\cdot\frac{r}{\beta(\beta-r)}dz = \int x^r D_r \frac{1}{\beta(\beta-r)}dz = \frac{1}{\beta}\int\frac{x^r}{(r-\beta)^2}dz = 2\pi l x\cdot\frac{x^\beta}{\beta}. \tag{74}$$

Heraf kan atter $B(x)$ findes ved Integration med Hensyn til β, hvorved det ved Bestemmelsen af den lavere Integrationsgrænse maa erindres, at den reelle Del af Differensen $r-\beta$ maa være en positiv Størrelse, men at den reelle Del af r i øvrigt kan tillægges en vilkaarlig konstant endelig Værdi.

I det her foreliggende Tilfælde er $\beta = -2n$, hvor n er et positivt helt Tal, den nævnte Betingelse er altsaa altid opfyldt, naar vi sætte den lavere Integrationsgrænse lig $-\infty$. Derved bliver ogsaa

$$l\left(1+\frac{r}{2n}\right) = \int_{-\infty}^{-2n}\frac{r}{\beta(\beta-r)}d\beta = \int_{-\infty}^{-2n}\left(\frac{1}{\beta-r}-\frac{1}{\beta}\right)d\beta = \left[l\left(1-\frac{r}{\beta}\right)\right]_{-\infty}^{-2n}.$$

De fra Γ-Funktionen hidrørende Led i $f(x)$ kunne derfor fremstilles samlede under Formen

$$f_3 = -\Sigma_n \int_{-\infty}^{-2n}\frac{x^\beta}{\beta}d\beta.$$

Men nu er

$$\int_{-\infty}^{-2n}\frac{x^\beta}{\beta}d\beta = \int_{-\infty}^{-2n}d\beta\int_{\infty}^{x}x^{\beta-1}dx = \int_{\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{-2n}x^{\beta-1}d\beta = \int_{\infty}^{x}\frac{x^{-2n-1}}{lx}dx = -\int_{x}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{xlx}dx.$$

Følgelig erholdes endelig, idet $x > 1$,

$$f_3 = \sum_{n=1}^{n=\infty}\int_x^\infty\frac{x^{-2n}}{xlx}dx = \int_x^\infty\frac{1}{xlx}\,\Sigma x^{-2n}dx = \int_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)\,x\,lx}.$$

Man ser umiddelbart, at dette Integral aftager stærkt, naar x voxer, og dets Indflydelse ved Bestemmelsen af $f(x)$ bliver derfor af ringe Betydning. For $x = 2$ angiver Oppermann [1]), at dets Værdi er omtrent $\frac{1}{7}$, det kan derfor, naar $x > 2$, aldrig faa nogen større Værdi end denne og spiller kun en Rolle, for saa vidt vi tage $x < 2$.

Vi komme dernæst til det vigtigste af de i Formlen for $ls(r)$ indgaaende Led, nemlig $-l(r-1)$. Det tilsvarende Led i $f(x)$ bliver

$$f_2 = \frac{1}{2\pi l x}\int x^r D_r \frac{1}{r}\, l(r-1)\, dz.$$

Dette kan behandles paa lignende Maade som de tilsvarende Integraler ovenfor. Betragter man nemlig det almindelige Integral

$$B(x) = \int x^r D_r \frac{1}{r}\, l\left(\frac{r}{\beta} - 1\right) dz\,,$$

saa er, idet β antages at være uafhængig af r,

$$\frac{dB(x)}{d\beta} = \int x^r D_r \frac{1}{r}\cdot\frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, dz = \frac{1}{\beta}\int\frac{x^r}{(r-\beta)^2}\, dz = 2\pi l x\cdot\frac{x^\beta}{\beta}\,,$$

for saa vidt den reelle Del af $r-\beta$ er positiv. Naar nu $B(x)$ heraf bestemmes som

$$\frac{B(x)}{2\pi l x} = \int_g^1 \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta\,,$$

saa maa altsaa den lavere Grænse g og Integrationsvejen bestemmes saaledes, at den reelle Del af $r-\beta$ stedse er positiv, og at samtidig ved at benytte den samme Integrationsvej

$$\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, dz = l(r-1).$$

Men nu er

$$\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, d\beta = \int_g^1 \left(\frac{1}{r-\beta} - \frac{1}{\beta}\right) d\beta = \Big[l(r-\beta) - l\beta\Big]_g^1 = \left[l\left(\frac{r}{\beta} - 1\right)\right]_g^1 = l(r-1) - l\left(\frac{r}{g} - 1\right).$$

For at det sidste Led skal forsvinde, maa mod g være uendelig. Dette kan ikke ske derved, at man sætter $g = +\infty + bi$, da den reelle Del af g maa være mindre end den reelle Del af r.

Man kan heller ikke give g en negativ uendelig reel Værdi, eftersom man da, hvorledes end Integrationsvejen lægges, vilde faa indført i $l(r-1)$ et imaginært Led $\pm \pi i$.

---

[1]) Oversigt over det Kgl. Danske Vidensk. Selskabs Forh. 1882, S. 178.

Tænke vi os nemlig Integralet $\int_{-\infty}^{1} \frac{-r\,d\beta}{\beta(r-\beta)}$ delt i de tre Dele $\int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{-\rho}^{+\rho} + \int_{\rho}^{1}$, hvor Integrationsvejen i det første og sidste er retlinet og for det sidste en Halvcirkel med den uendelig lille Radius ρ, saa give det første og sidste Integral tilsammentagne den reelle Værdi

$$l\left(\frac{r}{-\rho}-1\right) - l\left(\frac{r}{-\infty}-1\right) + l(r-1) - l\left(\frac{r}{\rho}-1\right) = l\left(\frac{\frac{r}{-\rho}-1}{\frac{r}{-\infty}-1}\cdot\frac{r-1}{\frac{r}{+\rho}-1}\right)$$

$$= l\,\frac{(r+\rho)(r-1)}{(r-\rho)\left(\frac{r}{\infty}+1\right)} = l(r-1), \quad \text{for } \rho = 0.$$

Det mellemste Integral giver, eftersom Integrationsvejen vælges saaledes, at Polpunktet $\beta = 0$ omgaas ved at integrere gjennem positive eller negative Buer φ, henholdsvis, idet $\beta = \rho e^{i\varphi}$,

$$\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{-r\,d\beta}{\beta(r-\beta)} = -\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{1}{\beta}\,d\beta = -i\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = -\pi i \quad \text{eller ogsaa} \quad = -i\int_{\pi}^{0} d\varphi = +\pi i.$$

Det imaginære Led kan altsaa ikke undgaas. Alligevel kunne vi bruge $-\infty$ som lavere Grænse, idet Middeltallet mellem de to sidste Integraler er lig Nul. Vi kunne derfor skrive $l(r-1)$ som den halve Sum af to Integraler

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{-r\,d\beta}{\beta(r-\beta)},$$

idet vi vælge Integrationsvejen forskjellig for de to Integraler. Men dette vil ikke sige andet, end at vi ved Integrationen helt bortkaste det singulære Integral, som hidrører fra det uendelige Element for $\beta = 0$. Man kunde ogsaa, som Riemann gjør, vælge den lavere Grænse som $g = \pm\infty i$ med passende Valg af Integrationsvejen.

Hvad enten man gaar frem paa den ene eller den anden Maade, skal Integrationen ved Bestemmelsen af $B(x)$ udføres paa samme Maade, og vi faa altsaa

$$\frac{B(x)}{2\pi l x} = \int_{-\infty}^{1} \frac{x^{\beta}}{\beta}\,d\beta,$$

hvor Integrationen kan udføres ved simpelthen at indsætte Grænserne i det ubestemte Integral, idet man bortkaster det singulære Integral for $\beta = 0$. Ændre vi dette Integral ved Substitutionen $x^{\beta} = z$, $\beta = \frac{lz}{lx}$, $d\beta = \frac{1}{z\,lx}\,dz$, saa faas

$$f_2 = \frac{B(x)}{2\pi l x} = \int_0^x \frac{dz}{lz} = \int_0^x \frac{dx}{lx} = Li(x),$$

idet det sidste Integral med Bortkastelse af det singulære Integral netop er **Integrallogarithmen** til x, saaledes som denne sædvanlig defineres.

Vi se altsaa, at Leddet $-l(r-1)$ medfører Indbringelsen af Integrallogarithmen i $f(x)$. Funktionen $Li(x)$ kan som bekjendt fremstilles ved Rækken

$$Li(x) = C + llx + \frac{lx}{[1]} + \frac{(lx)^2}{2.[2]} + \frac{(lx)^3}{3.[3]} + \frac{(lx)^4}{4.[4]} + \cdots \tag{75}$$

Det fortjener at bemærkes, at af Leddene i denne Række hidrøre alle de, som indeholde Potenser af lx fra $-l\left(1-\frac{1}{r}\right)$. Sætter man nemlig $-l(r-1) = -lr - l\left(1-\frac{1}{r}\right)$ og indfører hvert af disse Led i det Riemann'ske Integral, saa kan $l\left(1-\frac{1}{r}\right)$ udvikles i Række efter Potenser af $\frac{1}{r}$. Divideres med r og differentieres, saa giver den saaledes fremkomne Række ved Integration Led for Led netop de Led af Integrallogarithmen, som indeholde Potenser af lx. De to første maa da hidrøre fra $-lr$, altsaa maa man have

$$\frac{1}{2\pi\, lx}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r\left(\frac{1}{r}\,lr\right) dz = C + llx. \tag{76}$$

Vi komme endelig til det sidste Led i Formlen for $ls(r)$, nemlig det, som indeholder Σa. Leddene i denne Sum kunne nu behandles ganske paa samme Maade som de tidligere, idet de opfattes som specielle Tilfælde af den almindelige Form

$$B(x) = \int x^r D_r \frac{1}{r}\, l\left(1-\frac{r}{\beta}\right) dz = 2\pi\, lx \int_g^{\beta} \frac{x^{\beta}}{\beta}\, d\beta.$$

hvor for β sættes $\frac{1}{2} \pm ai$. Som lavere Integrationsgrænse kan ogsaa her vælges $g = -\infty$, naar Integrationen udføres ganske som i forrige Tilfælde. Det i $B(x)$ optrædende Integral ændres ved at sætte $x^{\beta} = z$ til Formen

$$\int_0^{x^{\beta}} \frac{dz}{lz} = Li(x^{\beta}).$$

Herefter blive altsaa to sammenhørende Led i $f(x)$, som afhænge af samme a,

$$-\left(Li(x^{\frac{1}{2}+ai}) + Li(x^{\frac{1}{2}-ai})\right),$$

og hele den fra Σa hidrørende Del af $f(x)$

$$f_4 = -\Sigma a\left(Li(x^{\frac{1}{2}+ai}) + Li(x^{\frac{1}{2}-ai})\right).$$

Den endelige Form for Riemann's Formel bliver herefter

$$f(x) = Li(x) - \Sigma a\left(Li(x^{\frac{1}{2}+ai}) + Li(x^{\frac{1}{2}-ai})\right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\,lx} - l2, \tag{77}$$

som kun afviger fra Riemann's Resultat ved, at Konstanten er $-l2$ ligesom hos Genocchi, i Stedet for $l\xi(0)$.

Selv en meget flygtig Sammenligning med de optalte Primtalmængder viser, at det første Led i denne Formel særdeles nøje fremstiller Funktionen $\vartheta(x)$. Afvigelserne mellem $\vartheta(x)$ og $Li(x)$ maa altsaa navnlig tilskrives det periodiske Led Σ_α. Da vi ikke kjende Rødderne α, er det ikke muligt af Formlen at slutte noget bestemt om Størrelsen af disse Afvigelser, men det vil i hvert Fald være gavnligt at se, under hvilke forskjellige Former dette periodiske Led kan fremstilles.

Da vi fik et af de i denne Sum indgaaende Led under Formen $\int_0^{x^\beta}\frac{dz}{lz}$, saa kan dette ændres ved at sætte $z=y^\beta$. Derved faas

$$Li(x^\beta)=\int_0^x \frac{y^{\beta-1}}{ly}dy=\int_0^x\frac{x^{\beta-1}}{lx}dx.$$

Indføres heri $\frac{1}{2}\pm\alpha i$ for β og tages to sammenhørende Led, faas disses Sum at være

$$\int_0^x\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+\alpha i}}{lx}+\frac{x^{-\frac{1}{2}-\alpha i}}{lx}\right)dx = 2\int_0^x\frac{\cos(\alpha lx)}{\sqrt{x}\,lx}dx\,,$$

saa at altsaa de periodiske Led ogsaa kunne skrives under Formen

$$-2\,\Sigma_\alpha\int_0^x\frac{\cos(\alpha lx)}{\sqrt{x}\,lx}dx\,,\quad \text{eller som}\quad -2\int_0^x\frac{\Sigma\cos(\alpha lx)}{\sqrt{x}\,lx}dx\,, \tag{78}$$

hvis Rækken $\Sigma\cos(\alpha lx)$ er konvergent. Under denne Forudsætning vilde da, hvis M var den største positive eller negative Værdi, som Rækken $\Sigma\cos(\alpha lx)$ kunde antage, de periodiske Leds Sum være beliggende mellem Grænserne $\pm M.2Li(x^{\frac{1}{2}}) = \pm M.2\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{x}\,lx}$.

En anden Form for Summen Σ_α faas ved at bemærke, at man ved Bestemmelsen af $B(x)$ kan vælge den lavere Integrationsgrænse g som $a\pm\infty i$, hvor a er en reel endelig Størrelse, specielt $\frac{1}{2}$. Man kan derfor skrive to sammenhørende Led under Formen

$$-\left(\int_{\frac{1}{2}+\infty i}^{\frac{1}{2}+\alpha i}\frac{x^\beta}{\beta}d\beta+\int_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}-\alpha i}\frac{x^\beta}{\beta}d\beta\right) = -\left(i\int_\infty^\alpha\frac{x^{\frac{1}{2}+ti}}{\frac{1}{2}+ti}dt - i\int_\infty^\alpha\frac{x^{\frac{1}{2}-ti}}{\frac{1}{2}-ti}dt\right) = ix^{\frac{1}{2}}\int_\alpha^\infty\left(\frac{x^{ti}}{\frac{1}{2}+ti}-\frac{x^{-ti}}{\frac{1}{2}-ti}\right)dt$$

$$= ix^{\frac{1}{2}}\int_\alpha^\infty\frac{(\frac{1}{2}-ti)x^{ti}-(\frac{1}{2}+ti)x^{-ti}}{\frac{1}{4}+t^2}dt = x^{\frac{1}{2}}\int_\alpha^\infty\frac{2t\cos(tlx)-\sin(tlx)}{\frac{1}{4}+t^2}dt\,,$$

saa at Summen af de periodiske Led antager Formen

$$\sqrt{x}\,\Sigma_\alpha\int_\alpha^\infty\frac{2t\cos(tlx)-\sin(tlx)}{\frac{1}{4}+t^2}dt. \tag{79}$$

Ogsaa heraf synes det rimeligt, at disse Leds Sum maa være beliggende indenfor Grænser, som væsentlig ere proportionale med $\sqrt{x}$.

Vi se saaledes, at Riemann's Fremgangsmaade virkelig er i Stand til at lede til et exakt Udtryk for Primtalmængden og tilmed, hvad man a priori aldeles ikke var berettiget til at vente, i en saadan Form, at i et enkelt Led Integrallogarithmen træder frem som en kontinuerlig Tilnærmelsesformel, hvis Afvigelser fra den søgte Funktion $\vartheta(x)$ tydelig fremtræde under en saadan periodisk Form, at de, hvis en nøjere Beregning af dem var mulig ved Hjælp af selve Formlen, vilde vise sig snart at være positive, snart negative. Men en Beregning af de periodiske Led ved Hjælp af Formlen lader sig naturligvis ikke iværksætte, saa længe Størrelserne α ere ubekjendte, og selv om de kjendtes, vilde de periodiske Led fremtræde i Form af en Række, der skulde fremstille en meget variabel diskontinuert Funktion. Rækken maatte i hvert Fald blive uendelig og uden Tvivl saa lidet konvergent, at den ikke kunde bruges til nogen numerisk Beregning. Derimod kunde det tænkes muligt at omdanne Rækken til andre Funktionsformer, som tilstedte en saadan eller ialfald en Bestemmelse af Grænser, indenfor hvilke Værdien af de periodiske Led maatte være beliggende.

Det er med Hensyn til Bedømmelsen af Muligheden af saadanne Transformationer af stor Interesse, at man er i Stand til at fremstille $f(x)$ under en anden med den forrige noget beslægtet Form, som ganske vist paa en vis Maade ikke giver noget reelt Udbytte, men som dog giver et Indblik i forskjellige Forhold, som Riemann's Formel ikke giver nogen Oplysning om, saa længe Størrelserne α ere ubekjendte.

Det vil erindres, at det ved Bestemmelsen af det Riemann'ske Integral særlig kom an paa at fremstille $s(r)$ i Form af et Produkt af Faktorer. — For at kunne udføre Integrationen Led for Led vil det imidlertid ogsaa være fuldstændig nok, hvis $\frac{1}{s(r)} = \Pi(1-p^{-r})$ kan fremstilles paa denne Maade, og naar man kun vil have $\vartheta(x)$ for en vilkaarlig valgt endelig Grænse x, saa vil det være fuldt tilstrækkeligt, hvis Produktet af Faktorerne $1-p^{-r}$, taget for alle Primtal op til en vilkaarlig valgt Grænse $\gamma \gtreqless x$, kan udtrykkes som et Produkt af lineære Faktorer $(ar+b)$. Thi naar Summen $\sigma(r) = 1^{-r} + 2^{-r} + 3^{-r} \ldots + n^{-r} + \ldots$, hvor n betegner alle de Tal, som kun indeholde Primfaktorer $\leqq \gamma$, indsættes i det Riemann'ske Integral, saa faas alligevel som Resultat $\frac{1}{2}(\vartheta(x+0) + \vartheta(x-0))$ saalænge $x \leqq \gamma$.

Det er i Virkeligheden ikke vanskeligt at fremstille $\frac{1}{\sigma(r)}$ under Form af et Produkt. Som bekjendt er nemlig Produktudviklingen for $\sin z$ ogsaa gjældende for komplexe z, altsaa er

$$e^z - e^{-z} = 2z \,.\, \Pi_m\left(1 + \frac{z^2}{m^2\pi^2}\right) \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots \infty).$$

Sætter man heri $z = \frac{1}{2}rlp$, faas efter Division med e^z

$$1 - p^{-r} = rlp \,.\, p^{-\frac{r}{2}} \prod_1^{\infty}\left(1 + \left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right), \tag{80}$$

og altsaa, naar man heri efterhaanden sætter p = alle Primtal $\overline{\overline{<}}\ \gamma$, samt γ antages > 1,

$$\frac{1}{\sigma(r)} = \Pi_p\left(rlp\,.\,p^{-\frac{r}{2}}\right)\Pi_p\prod_1^\infty{}_m\left(1+\left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right). \tag{81}$$

Følgelig faas ved paa begge Sider at tage Logarithmen

$$-l\sigma(r) = \Sigma llp + \theta(\gamma)lr - \frac{r}{2}\Sigma lp + \Sigma_p\Sigma_m l\left(1+\left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right). \tag{82}$$

Ogsaa her fremtræder der et Udtryk for $l\sigma(r)$, hvis enkelte Led, indsatte i Integralet (67),

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi lx}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r\left(\frac{1}{r}\,l\sigma(r)\right)dz,$$

kunne integreres.

At gjennemgaa Udførelsen en detail vil efter det foregaaende være overflødigt, vi kunne nøjes med at anføre Resultatet, som bliver

$$f(x) = -\sum_2^\gamma llp + \theta(\gamma)(C+llx) - \Sigma_p\Sigma_m\left(Li\,x^{\frac{2m\pi i}{lp}} + Li\,x^{-\frac{2m\pi i}{lp}}\right), \tag{83}$$

eller ved Omdannelse af de imaginære Integrallogarithmer

$$f(x) = -\sum_2^\gamma llp + \theta(\gamma)(C+llx) - 2\Sigma\int_0^x \frac{\cos\left(2m\pi\frac{lx}{lp}\right)}{xlx}dx, \tag{84}$$

idet der summeres først med Hensyn til m og dernæst med Hensyn til p, ($p\ \overline{\overline{<}}\ \gamma$).

Vi have her faaet en Formel, som vel viser en vis Analogi med den Riemann'ske, men dog væsentlig adskiller sig fra denne ved sin aabenbart mere *identiske Karakter*. Vi skulle ikke opholde os ved at prøve paa at transformere den her optrædende Integralsum, saaledes at Identiteten træder tydelig frem, men nøjes med at henvise til en analog Formel i det følgende, som er lettere at behandle (se nedenfor § 7).

Paa dette Sted have vi kun anført denne Formel, fordi den giver et gavnligt Vink om, i hvilken Retning man skal søge for at komme efter de virkelige Værdier af Rødderne α. Om end det ikke kan ventes, at disse skulle faa samme Form som de her indgaaende Argumenter $\frac{2m\pi}{lp}$, saa er det dog højst rimeligt, *at de maa afhænge dels af Primtallenes Logarithmer, dels af en Række hele Tal* ligesom hine.

Det ligger nær at formode, at man ved Anvendelsen af andre diskontinuerte bestemte Integraler end det, der ligger til Grund for hele denne Undersøgelse, maatte kunne erholde andre Former, som muligvis gave bedre Resultater end dette. Men dette er ikke Tilfældet. Alle de, vi have forsøgt, vise sig at frembyde enten ganske de samme eller endog større Vanskeligheder, og altid viser det sig nødvendigt at foretage en Omdannelse af Funktionen $s(r)$, da man i alt Fald paa dette Standpunkt udelukkende er henvist til denne som den eneste kontinuerte Funktion, som staar i umiddelbar Forbindelse med Primtalrækken. Vi faa ganske vist senere en anden Funktion, som frembyder noget lignende, nemlig log. $\Gamma(x)$, men denne Forbindelse finder kun Sted for hele Værdier af x. Denne Funktion synes derfor ikke at kunne benyttes paa lignende Maade som $s(r)$, medens den derimod spiller en fremtrædende Rolle ved de rent numeriske Undersøgelser, som vi beskjæftige os med i et senere Afsnit af denne Afhandling.

Efter at man ved Beregning af Riemann's Integral har fundet et Udtryk for $\vartheta(x)$, kan selve Antallet af Primtal $\theta(x)$ findes ved Hjælp af Möbius's Faktorer, idet man ved Omvending af Ligningen

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$$

erholder

$$\theta(x) = \vartheta(x) - \tfrac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}\vartheta(x^{\frac{1}{5}}) \ldots = \Sigma\frac{1}{m}\mu(m)\vartheta\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

Sætter man altsaa for $\vartheta(x)$ det fundne Udtryk efter Riemann's Formel, saa faas, idet $F(x)$ betegner en Funktion, som er lig $\frac{1}{2}(\theta(x-0) + \theta(x+0))$,

$$F(x) = \Sigma\frac{1}{m}\mu(m)f\left(x^{\frac{1}{m}}\right). \tag{85}$$

For saa vidt man havde Riemann's Formel i en saadan Skikkelse, at en korrekt Beregning af $f(x)$ lod sig udføre, saa vilde man ved den numeriske Bestemmelse af $\theta(x)$ for et enkelt x lettest kunne udføre denne ved alene at søge $\vartheta(x)$ ved Formlen og finde de andre Led ved Optællinger i Primtaltavlerne, for saa vidt disse vare tilstrækkelig omfattende.

Skal man derimod have et analytisk Udtryk for $F(x)$, saa har man for $f(x)$ at indsætte det fundne Udtryk (77). Det vigtigste Led i dette er Leddet $Li(x)$, som altsaa i $F(x)$ vilde give det tilsvarende Led

$$F_1(x) = Li(x) - \tfrac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \ldots = \sum_1^{\infty}\frac{1}{m}\mu(m)Li\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

hvor Summen kan udstrækkes fra $m = 1$ til $m = \infty$. Men nu bestaar $Li(x)$ af $C + llx +$ en Række, der skrider frem efter Potenser af lx. Betegnes denne Række ved $A(x)$, saa faas altsaa

$$F_1(x) = \Sigma\frac{1}{m}\mu(m).C + \Sigma\frac{1}{m}\mu(m)\,l\frac{lx}{m} + \Sigma\frac{1}{m}\mu(m)A\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

Det sidste Led giver en Række, hvis Koefficienter umiddelbart kunne bestemmes ved Hjælp af (41), og man faar, naar denne Række betegnes ved Funktionstegnet $P(x)$,

$$P(x) = \frac{lx}{|1|.1s_2} + \frac{(lx)^2}{|2|.2s_3} + \frac{(lx)^3}{|3|.3s_4} + \frac{(lx)^4}{|4|.4s_5} + \ldots \tag{86}$$

Hvad de to første Led angaar, saa give disse, under Forudsætning af Rigtigheden af Formlerne (28) og (33),

$$\Sigma \frac{1}{m}\mu(m) . C + \Sigma \frac{1}{m}\mu(m) . llx - \Sigma \frac{1}{m}\mu(m) lm = 0 . C + 0 . llx + 1 ,$$

saa at man erholder som svarende til Leddet $Li(x)$ et Led i Formlen for $\theta(x)$ af Formen $1 + P(x)$.

Ligeledes ses, at det konstante Led $-l2$ i Formlen for $F(x)$ vil optræde multipliceret med $\Sigma \frac{1}{m}\mu(m)$ og altsaa helt vil forsvinde.

Tilbage bliver derefter det Led, som indeholder de imaginære Integrallogarithmer, samt Leddet $\int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{xlx}$. Dette sidste Led giver Anledning til det nye Led i $F(x)$

$$F_3(x) = \sum_1^\infty \frac{\mu(m)}{m}\int_{x^{\frac{1}{m}}}^\infty \frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{yly} .$$

Sætter man i ethvert af de her optrædende Integraler $y = z^{\frac{1}{m}}$, altsaa $ly = \frac{1}{m} lz$, $dy = \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}-1} dz$, faas

$$\int_{x^{\frac{1}{m}}}^\infty \frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{yly} = \int_x^\infty \frac{1}{\left(z^{\frac{2}{m}}-1\right)}\frac{dz}{zlz} ,$$

saa at man vilde faa en Række af Formen

$$F_3(x) = \sum_1^\infty \frac{\mu(m)}{m}\int_x^\infty \frac{1}{\left(x^{\frac{2}{m}}-1\right)}\frac{dx}{xlx} = \int_x^\infty \Sigma \frac{\mu(m)}{m} . \frac{1}{x^{\frac{2}{m}}-1} . \frac{dx}{xlx} .$$

Indflydelsen af dette Led kan altsaa ikke bedømmes, da dertil vilde kræves et nøjere Kjendskab til Rækker, hvis Koefficienter indeholde Faktorerne μ, og det lønner sig heller ikke at undersøge dette Led særskilt, da det er muligt, at det bør betragtes i Forbindelse med Leddene Σ_α, hvis tilsvarende Led i F heller ikke lade sig undersøge, saa længe man ikke kjender Rødderne α.

Men saameget kunne vi betragte som sikkert, at for saa vidt vi som Tilnærmelsesformel for $\vartheta(x)$ opstille Formlen

$$\vartheta(x) = Li(x) - C - llx ,$$

saa faa vi som tilsvarende til denne Tilnærmelsesformlen

$$\theta(x) = P(x) , \tag{87}$$

og selv om vi medtage de to bortkastede Led i Integrallogarithmen, hvis Indflydelse, naar undtages den aller første Del af Talrækken, er ringe, saa medfører dette kun, at man faar

$$\theta(x) = P(x) + 1. \tag{87'}$$

Hvilken af disse to Formler som rettest bør benyttes, ses ved Sammenligning med de sande Værdier af $\theta(x)$; og den vedføjede Tabel VI viser tydelig, at naar undtages $x < 3$, saa giver den sidste Formel øjensynlig den bedste Overensstemmelse, og vi adoptere derfor denne (87′) som den endelige Form for en Tilnærmelsesformel for $\theta(x)$.

I Virkeligheden er $P(x)+1$ altsaa kun en anden Form af den kontinuerlige Del af Riemann's Formel, specielt af det Led, som fremstilles ved $Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}})\ldots$, men den besidder fremfor denne den Fordel at have Formen af en konvergent Række, som i hvert enkelt Tilfælde direkte lader sig beregne Led for Led. Tilmed er Rækkens Form ikke uden Interesse, navnlig fordi den i Koefficienterne indeholder Funktioner af Primtallene. Det ligger ret nær at formode, at det kunde være muligt for at faa et exakt Udtryk for $\theta(x)$ at erstatte de i Nævnerne optrædende Funktioner $s(r)$ ved andre med disse analoge, men afhængige alene af Primtallene op til x og altsaa diskontinuerte.

Da det maatte være af særlig Betydning at gjøre Beregningen af Funktionen $P(x)$ saa let og bekvem som mulig, besluttede jeg, efter at have fundet dens Fremstilling ved Rækken (86), at forsøge Beregningen af en Tavle over saamange Værdier af den, at en Sammenligning mellem $\theta(x)$ og $P(x)$ indenfor de Grænser, for hvilke $\theta(x)$ var bestemt ved Primtaloptællinger, kunde beregnes ved simpel Interpolation, saaledes at man i det mindste erholdt en rigtig Decimal. Til dette Øjemed beregnedes da først den i Tab. II meddelte Tavle over Integrallogarithmen og ved Hjælp af denne Værdier af Funktionen $P(x)$ paa den Maade, som nedenfor er angivet i Forklaringen til denne Tavle. Da det imidlertid derved viste sig, at Interpolationen, forsaavidt $l.x$ toges til Argument, var langt simplere for Funktionen $\log. P(x)$ end for selve $P(x)$, saa er i Tavle III $\log. P(x)$ taget som det principale, medens de anførte Værdier af selve $P(x)$ kun ere tilføjede af Hensyn til Kontrollen og Bedømmelsen af den Maade, hvorpaa Tavlen er beregnet. — Det bør endnu tilføjes, at de Tilnærmelsesværdier for $\theta(x)$, som beregnes ved denne Tavle, forsaavidt jeg har undersøgt Sagen, stemme saa godt overens med de af Glaisher[1]) angivne, som det kunde ventes. — Selv om der altsaa kan rejses Tvivl om den formelle Rigtighed af Udledelsen af de Sætninger af Möbius, paa hvilke Beviset for Formlen $\theta(x) = P(x) + 1$ beror, saa vil der dog sikkert ikke kunne være Tvivl om den reelle Gyldighed af disse Formler.

Det vil af det foregaaende være klart, at der med Hensyn til den korrekte numeriske Beregning af Primtalmængden op til en vis Grænse ikke er vundet noget ved Riemann's Formel. Men ikke desto mindre have hans Under-

[1]) James Glaisher, Factor Table for the sixth Million. London 1883.

søgelser bragt et væsentligt Fremskridt i vort Kjendskab til Loven for Primtallenes Fordeling, idet han er naaet til at angive Formen af den Funktion, som skal bruges til at udtrykke Loven for Mængden af dividerede Primtalpotenser op til Grænsen x. Da Differentialkvotienten af det dominerende Led $Li(x)$ i Riemann's Formel for $\vartheta(x)$ er $\frac{1}{lx}$, saa lærer denne Formel os endvidere, at det ikke, som Gauss antog, er Tætheden af selve Primtallene, som gjennemsnitlig er omvendt proportional med lx, men at dette derimod er Tilfældet med, hvad man med en analog Betegnelse kunde kalde Tætheden af dividerede Primtalpotenser.

Men trods dette synes dog det Held, Riemann har haft med sine Undersøgelser i denne Retning, at være af en noget tilfældig Natur. Det beror udelukkende paa den særlig hensigtsmæssige Form, det er lykkedes ham at give Funktionen $ls(r)$, og da atter paa, at Leddet $l(r-1)$ udsondrer sig fra alle de andre og bliver af dominerende Betydning. At dette maatte blive Tilfældet, er ikke ganske klart, selv om den Side 10 anførte Formel af Dirichlet, $s(1+\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{(\rho)}{\rho}$, som Mertens og tildels ogsaa Tchebycheff have benyttet ved deres Undersøgelser, nok kunde tyde paa noget saadant. Men selv om det ogsaa vil lykkes ved fortsatte Studier at komme til fuld Klarhed over denne Udvikling og over de i Riemann's Formel indgaaende Rødder α, saa synes det dog, som om den Form, hvorunder disse indgaa i den endelige Formel, i høj Grad maatte vanskeliggjøre igjennem denne nogensinde at naa til en nøjagtig Beregning af Mængden af Primtal op til en given Grænse, og stiller man sig altsaa dette Formaal, saa vil man derfor vistnok endnu i lang Tid være henvist til Beregninger af rent taltheoretisk Natur.

---

§ 4. Ufuldstændige Kvotienter. Theoremer af Berger og Césaro.

I det følgende betegner n gjennemgaaende et konstant helt Tal; det største hele Tal i Kvotienten $\frac{n}{x}$ betegnes efter Legendre ved Symbolet $E\frac{n}{x}$ eller $E\left(\frac{n}{x}\right)$, saa at altsaa

$$E\frac{n}{x} \leqq \frac{n}{x} < E\frac{n}{x} + 1 \quad \text{eller} \quad \frac{n}{x} - 1 < E\frac{n}{x} \leqq \frac{n}{x}. \tag{88}$$

Om saadanne ufuldstændige Kvotienter lader der sig angive forskjellige mærkelige Sætninger.

Betragte vi Talrækken

$$E\frac{n}{1},\ E\frac{n}{2},\ E\frac{n}{3} \dots E\frac{n}{a},$$

hvor $1, 2, 3 \dots a$ ere de hele Tal op til a inklusive, saa danne de enkelte Led en Række aftagende hele Tal. Nogle af disse kunne være lige store, og det er let at angive, hvor mange der ere lig et givet helt Tal x.

Thi den største Nævner, som ved Division i n giver den ufuldstændige Kvotient x, maa være det største hele Tal, som fremkommer ved Division af n med x, altsaa $E\frac{n}{x}$; ligesaa er den største Nævner, som giver Kvotienten $x+1$, Tallet $E\frac{n}{x+1}$. De Tal i Rækken, som ere lig x, ere altsaa i Almindelighed de, hvis Nævnere ere Tallene

$$E\frac{n}{x+1}+1\,,\quad E\frac{n}{x+1}+2\,,\;\ldots\; E\frac{n}{x}\,,\quad \text{i Antal}\quad E\frac{n}{x}-E\frac{n}{x+1}\,.$$

Dette behøver dog ikke at være Tilfældet for de sidste Led i Rækken. Men betegnes $E\frac{n}{a}$ ved q, saa ses let, at Antallet af Brøker, som ere lig med q, vil være $a-E\frac{n}{q+1}$.

Betragte vi dernæst, idet F betegner en vilkaarlig Funktion, Summen

$$S=\sum_{1}^{a}{}_xF\left(E\frac{n}{x}\right)=F\left(E\frac{n}{1}\right)+F\left(E\frac{n}{2}\right)+F\left(E\frac{n}{3}\right)+\ldots F\left(E\frac{n}{a}\right), \tag{89}$$

saa maa denne aabenbart kunne ændres til Formen

$$S=A_0F(q)+A_1F(q+1)+\ldots A_nF(n)\,,$$

hvor A_0, A_1 ... betegne konstante Koefficienter, som angive, hvormange af Funktionerne $F\left(E\frac{n}{x}\right)$ der blive lig henholdsvis $F(q)$, $F(q+1)$ o. s. v. Men disse Antal ere angivne ovenfor, og man faar altsaa

$$S=\left(a-E\frac{n}{q+1}\right)F(q)+\left(E\frac{n}{q+1}-E\frac{n}{q+2}\right)F(q+1)\ldots+\left(E\frac{n}{n-1}-E\frac{n}{n}\right)F(n-1)+F(n), \tag{90}$$

der ogsaa kan skrives

$$S=aF(q)+E\frac{n}{q+1}(F(q+1)-F(q))+E\frac{n}{q+2}(F(q+2)-F(q+1))+\ldots E\frac{n}{n}(F(n)-F(n-1)).$$

Sættes specielt $a=n$, faas de to Formler

$$\sum_1^n F\left(E\frac{n}{x}\right)=\sum_1^n\left(E\frac{n}{x}-E\frac{n}{x+1}\right)F(x) \tag{91}$$

og

$$\sum_1^n F\left(E\frac{n}{x}\right)=n\,F(1)+\sum_2^n(F(x)-F(x-1))\,E\frac{n}{x}\,. \tag{92}$$

Paa denne Maade er Formlen angivet af Césaro[1]; den almindeligere Sætning

$$\sum_1^a F\left(E\frac{n}{x}\right)=a\,F(q)+\sum_{q+1}^n(F(x)-F(x-1))\,E\frac{n}{x} \tag{93}$$

skyldes i denne Form Berger[2]).

---

1) Formule d'arithmétique, Mathesis, T. II, p. 97.

2) Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres, Nova Acta Rge. Soc. Scientiarum Upsaliensis Ser. III, Vol. XI, 1881.

Særlig mærkes Tilfældet $a = E\sqrt{n}$. Da man altid maa have

$$n \overline{\gtrless} (E\sqrt{n}+1)^2 - 1\,,$$

saa faas

$$E\sqrt{n} \overline{\gtrless} \frac{n}{E\sqrt{n}} \overline{\gtrless} E\sqrt{n}+2\,,$$

saa at altsaa $q = E\dfrac{n}{a}$ maa være et af Tallene a, $a+1$, $a+2$. Men betragtes Rækken

$$aF(a) + E\frac{n}{a+1}(F(a+1) - F(a)) + E\frac{n}{a+2}(F(a+2) - F(a+1)) + \text{o. s. v.},$$

saa ses, at hvis $q = a+1$, saa kan man sammendrage de to første Led til $aF(q)$, og hvis $q = (a+2)$, kan det samme gjøres med de tre første Led. Denne Række bliver derfor identisk med $aF(q) + \sum\limits_{q+1}^{n}(F(x) - F(x-1))\,E\dfrac{n}{x}$, saaledes at man for $q = E\sqrt{n}$ altid vil have

$$\sum_1^q F\left(E\frac{n}{x}\right) = qF(q) + \sum_{q+1}^{n}(F(x) - F(x-1))\,E\frac{n}{x}\,. \tag{94}$$

Sætter man $F(x) - F(x-1) = f(x)$, faas

$$\sum_{q+1}^{n} f(x)\,E\frac{n}{x} = \sum_1^q F\left(E\frac{n}{x}\right) - qF(q)\,, \tag{95}$$

og adderes paa begge Sider $\sum\limits_1^q f(x)\,E\dfrac{n}{x}$, saa findes endelig, som angivet af Berger,

$$\sum_1^n f(x)\,E\frac{n}{x} = \sum_1^q f(x)\,E\frac{n}{x} + \sum_1^q F\left(E\frac{n}{x}\right) - qF(q). \tag{96}$$

De angivne Formler tilstede en Udvidelse, som er værd at lægge Mærke til. Naar man nemlig i Stedet for at betragte en Række Brøker af Formen $E\dfrac{n}{x}$, hvor x ere alle hele Tal, lader x gjennemløbe en vilkaarlig valgt Række mærkelige Tal, som vi ville betegne ved z, iblandt disse (f. Ex. alle Primtal), og endvidere betegner ved $\Phi(x)$ Antallet af disse mærkelige Tal op til x inklusive, saa findes paa lignende Maade som ovenfor, at Antallet af Kvotienter $E\dfrac{n}{z}$, som netop ere lig x, i Almindelighed vil være $\Phi\left(\dfrac{n}{x}\right) - \Phi\left(\dfrac{n}{x+1}\right)$. Ved derefter at gjentage Ræsonnementet ganske paa lignende Maade som før faas følgende Relationer, svarende til (90) og (93):

$$\sum_1^a F\left(E\frac{n}{z}\right) = \left(\Phi(a) - \Phi\left(\frac{n}{q+1}\right)\right)F(q) + \sum_{q+1}^{n}\left(\Phi\left(\frac{n}{x}\right) - \Phi\left(\frac{n}{x+1}\right)\right)F(x)\,, \tag{97}$$

og

$$\sum_1^a F\left(E\frac{n}{z}\right) = \Phi(a)F(q) + \sum_{q+1}^{n}(F(x) - F(x-1))\,\Phi\left(\frac{n}{x}\right). \tag{98}$$

Ved som før at sætte $q = E\sqrt{n}$ faas som svarende til (96), idet $F(x) - F(x-1) = f(x)$,

$$\sum_1^n f(x)\,\Phi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^q f(x)\,\Phi\left(\frac{n}{x}\right) + \sum_1^q F\left(E\frac{n}{z}\right) - \Phi(q)F(q). \tag{99}$$

Ligeledes haves specielt for $a = n$

$$\sum_1^n F\left(E\frac{n}{z}\right) = \sum_1^n (F(x) - F(x-1))\,\Phi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n \left(\Phi\left(\frac{n}{x}\right) - \Phi\left(\frac{n}{x+1}\right)\right) F(x). \quad (100)$$

Ved at specialisere Formen af de indgaaende Funktioner samt Rækken af Tallene z lader der sig af disse Ligninger udlede en Mængde forskjellige Relationer, som ofte ere af en meget overraskende Form. Skjønt det for det Problem, vi behandle, ikke er ganske nødvendigt at fremhæve mere end en enkelt af dem, tro vi dog, at en lidt fyldigere Udvikling vil være paa sin Plads, og vi give derfor nedenfor en Række Exempler paa deres Anvendelse paa Primtallene. Baade Berger og Césaro have gjort en udstrakt Brug af deres Sætninger til Bestemmelse af Funktioner af Tallenes Divisorer, den første Begyndelse til disse Undersøgelser er allerede gjort af Dirichlet[1]).

Betragter man nemlig Differensen

$$E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x},$$

saa ses, at dens Værdi vil være lig Nul, undtagen naar x er en Divisor i n, da den er lig 1. Betegner altsaa d en Divisor i n, saa vil, naar $f(x)$ er en vilkaarlig Funktion, haves

$$\Sigma_d f(d) = \sum_{x=1}^{x=n} \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right) f(x), \quad (101)$$

som ved Hjælp af Berger's Theorem i mange Tilfælde tilsteder en tilnærmet Bestemmelse af den symmetriske Funktion $\Sigma f(d)$, hvor Summen udstrækkes til alle Divisorer i Tallene op til n inklusive.

Hvis man f. Ex. vil have Antallet af alle disse Divisorer, saa sættes $f(d) = d^0 = 1$, og det søgte Antal faas da ved efterhaanden at sætte $n = 1, 2, 3 \ldots n$ og summere; det vil være

$$N = \Sigma d^0 = \sum_{n=1}^{n=n} \sum_{x=1}^{x=n} \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right) = \sum_{x=1}^{x=n} E\frac{n}{x} = E\frac{n}{1} + E\frac{n}{2} + E\frac{n}{3} + \ldots E\frac{n}{n}. \quad (102)$$

For dette Antal vil det være let at angive en Tilnærmelsesformel. Ved Hjælp af (96) faas nemlig, idet $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $q = E\sqrt{n}$,

$$\sum_1^n E\frac{n}{x} = 2 \cdot \sum_1^q E\frac{n}{x} - q^2 = 2n\sum_1^q \frac{1}{x} - q^2 - 2\delta q, \quad (103)$$

hvor δ er en ægte Brøk.

Men nu er, idet ε er en ægte Brøk,

$$\sum_1^q \frac{1}{x} = lq + C + \frac{1}{2q} - \frac{\varepsilon}{12q^2}.$$

---

[1]) Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie, Abhandlungen der Berliner Akademie 1849; og Ueber ein die Division betreffendes Problem, Monatsber. der Berl. Akad. Januar 1851; eller Crelle's Journal Bd. 47.

Betragter man alene de tre første Led, saa danne disse for $q > 1$ en stedse voxende kontinuert Funktion, og altsaa er

$$lq + C + \frac{1}{2q} < l\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} < l(q+1) + C + \frac{1}{2(q+1)}.$$

Heraf faas atter

$$\sum_1^q \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{12q^2} < l\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_1^q \frac{1}{x} + \frac{1}{q+1} + \frac{\varepsilon'}{12(q+1)^2},$$

eller

$$l\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} > \sum_1^q \frac{1}{x} > l\sqrt{n} + C - \frac{\varepsilon''}{12n}.$$

Men nu er endvidere altid $\frac{n}{x} \geqq E\frac{n}{x} \geqq \frac{n+1}{x} - 1$, altsaa ogsaa

$$2n\sum_1^q \frac{1}{x} > 2\sum_1^q E\frac{n}{x} > 2(n+1)\sum_1^q \frac{1}{x} - 2\sqrt{n},$$

og da fremdeles $$n - 2\sqrt{n} < q^2 \leqq n,$$

saa faas endelig for N følgende Grænser

$$nln + n(2C-1) + 3\sqrt{n} > \sum_1^n E\frac{n}{x} > nln + n(2C-1) - 3\sqrt{n}, \tag{104}$$

idet vi af den lavere Grænse have bortkastet Leddene

$$ln + 2C - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\varepsilon''}{6n},$$

som tilsammen ville udgjøre en positiv Størrelse, naar $n > 2$.

Dette Resultat afviger lidt fra det, der angives af Berger, som sætter

$$\sum_1^n E\frac{n}{x} = nln + n(2C-1) \pm \lambda\sqrt{n}, \quad \text{hvor } \lambda < 4. \tag{105}$$

De her angivne Grænser ere altsaa lidt snevrere end Berger's, men alligevel ere de vistnok videre end nødvendigt, da der ikke er taget Hensyn til den Omstændighed, at de forskjellige Rester $\frac{n}{x} - E\frac{n}{x}$ i Virkeligheden ikke ville være uafhængige af hinanden.

(I Forbindelse hermed skal nævnes en interessant lille Sætning, som i en lidt anden Form skyldes Dirichlet. Er $\frac{1}{n}\sum_2^y E\frac{n}{x} = \varphi(y)$, saa er for $n = ab$

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(ab). \tag{106}$$

Den faas som en simpel Konsekvens af Formlen (93).)

Paa Grundlag af (96) findes, at naar n er et stort Tal, saa vil Middelværdien af Antallet af Divisorer i et Tal i Nærheden af n være $ln + 2C$. Ved en lignende Fremgangsmaade beviser Berger en hel Række lignende Sætninger, blandt hvilke vi skulle anføre følgende:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Middelværdien af } \Sigma d \text{ for et Tal i Nærheden af } n & & \text{er} & \dfrac{\pi^2}{6} n\,, \\ — & - \ \Sigma \dfrac{1}{d} & \text{er} & \dfrac{\pi^2}{6}\,, \\ — & - \ \Sigma l d & \text{er} & \dfrac{1}{2}(ln)^2 + Cln\,, \\ — & - \ \Sigma a^d & \text{er} & l\dfrac{1}{1-a}\,,\ 0 < a < 1\,, \\ — & - \ \Sigma \dfrac{1}{d+g} & \text{er} & \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{d\,.\,l\Gamma(g+1)}{dg} + C\right),\ g > -1\,, \\ — & - \ \Sigma d\,.\,l\left(1+\dfrac{1}{d}\right) & \text{er} & ln + C. \end{array}\right\} \quad (107)$$

Angaaende Beviserne for disse Sætninger og flere lignende henvises til den citerede Afhandling.

---

§ 5. Anvendelser paa Primtal.

Funktionen $E\frac{n}{x}$ egner sig paa Grund af sin diskontinuerte Karakter særlig til Anvendelse i Taltheorien, og flere Forfattere, blandt hvilke navnlig bør fremhæves Russeren Bougaïeff [1]), have ogsaa benyttet den ved taltheoretiske Undersøgelser. Skjønt disse endnu ikke synes direkte at ville lede til en kontinuert Tilnærmelsesformel for $\theta(x)$, saa kan dog denne Funktion udtrykkes exakt ved ufuldstændige Kvotienter, og Berger's Undersøgelser synes at angive en Vej, ad hvilken Tilnærmelsesformler derefter muligvis ville kunne opnaas. Det vil derfor være af Interesse at se i Sammenhæng de Resultater, hvortil Anvendelse af ufuldstændige Kvotienter fører.

Betegner man ved $\Phi_{(a,b,\ldots o,p)}(x)$ Antallet af Tal $\overline{\overline{<}}\ x$, som ikke ere delelige med noget af Primtallene $a, b, \ldots o, p$, saa er almindelig

$$\Phi_{a,b,c,\ldots o,p}(x) = \Phi_{a,b,c,\ldots o}(x) - \Phi_{a,b,c,\ldots o}\left(\frac{x}{p}\right). \tag{108}$$

Denne Ligning udtrykker nemlig kun, at Antallet af Tal, som ikke ere delelige med noget af Primtallene op til p inklusive, findes ved blandt dem, der ikke ere delelige med Prim-

---

[1]) Se Darboux: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. T. 10, 1876, p. 13.

tallene $a, b, c \ldots o$, at udslette alle Multipla af p. Af denne Ligning findes nu sukcessive, idet $\Phi_2 = x - E\frac{x}{2}$, $\Phi_{2,3}(x) = x - E\frac{x}{2} - E\frac{x}{3} + E\frac{x}{6} \ldots$
og almindelig

$$\Phi_{a,b,c\ldots p}(x) = x - \Sigma E\frac{x}{a} + \Sigma E\frac{x}{ab} - \Sigma E\frac{x}{abc} + \ldots, \tag{109}$$

hvor der i Nævnerne findes alle Produkter af de givne Primtal tagne 1 Gang. Er specielt $a, b, c \ldots$ alle Primtal op til $\sqrt{x}$, saa vil denne Formel som bekjendt angive $1 +$ Antallet af Primtal mellem $\sqrt{x}$ og x. Betegne derimod $a, b, c \ldots$ alle Primtal, bliver venstre Side lig 1, og vi faa den Ligning, som er fremstillet i (46).

Paa Grund af Arbejdets Vidtløftighed vil en virkelig numerisk Beregning af $\theta(x) - \theta(x^{\frac{1}{2}})$ ved Formlen (109) være meget besværlig, men den kan gjøres og er i Virkeligheden udført af Meissel[1]).

En lignende Formel skal være benyttet af Hargreave[2]) og Piarron de Mondesir[3]), men intet af disse Forfatteres Arbejder har været mig tilgængeligt i den originale Skikkelse.

Den Sætning, som vi først skulle lægge til Grund ved de følgende Betragtninger, udtrykkes i Formlen

$$\sum_1^n \Phi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n E\frac{n}{z}. \tag{110}$$

Den faas af (100) ved at sætte $F(x) = Ex$. z betegner her en Række mærkelige Tal, og $\Phi(x)$ Antallet af disse op til x inklusive. Paa venstre Side summeres med Hensyn til x, paa højre Side med Hensyn til alle Tal $z \leqq n$.

Af denne Formel følger en Række Konsekvenser, som ialfald ere ret oplysende. F. Ex. $z = p$, Rækken af alle Primtal, giver

$$\theta(x) + \theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p}; \tag{111}$$

$z = p^2$ giver

$$\theta(n^{\frac{1}{2}}) + \theta\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p^2}; \tag{112}$$

$z = ab$, Produkt af to enkelte Primtal, giver, idet Antallet af saadanne op til x er $\theta_2(x)$,

$$\theta_2(n) + \theta_2\left(\frac{n}{2}\right) + \theta_2\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{ab}. \tag{113}$$

---

[1]) Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen. Mathematische Annalen Bd. II, p. 636, jvfr. Bd. III, p. 523.

[2]) On the law of prime numbers. Philosophical Magazine Ser. 4, vol. VIII, 1854.

[3]) Annuaire de l'association française (Congrès du Havre 1877), jvfr. Nouv. Corresp. Math. VI, 1880, p. 256.

Ligesaa for $z = abc$

$$\theta_3(n) + \theta_3\left(\frac{n}{2}\right) + \theta_3\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E \frac{n}{abc}. \tag{114}$$

Betegner z alle «Primtalpotenser», d. e. Potenser af Primtal med hel Exponent (1 inkl.), faas, naar disses Antal betegnes ved $\mathfrak{P}(x)$,

$$\mathfrak{P}(n) + \mathfrak{P}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathfrak{P}\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E \frac{n}{p} + \Sigma E \frac{n}{p^2} + \Sigma E \frac{n}{p^3} + \ldots, \tag{115}$$

og ligeledes faas for Antallet af dividerede Primtalpotenser ved Benyttelse af (111), (112) og de analoge

$$\vartheta(n) + \vartheta\left(\frac{n}{2}\right) + \vartheta\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E \frac{n}{p} + \frac{1}{2} \Sigma E \frac{n}{p^2} + \frac{1}{3} \Sigma E \frac{n}{p^3} + \ldots \tag{116}$$

Flere af disse Ligninger kunne ogsaa betragtes fra et noget andet Synspunkt, hvorved deres Betydning bliver mere klar. Af den almindelige Ligning (101),

$$\Sigma f(d) = \Sigma\left(E \frac{n}{x} - E \frac{n-1}{x}\right) f(x),$$

faas nemlig ved at antage, at $f(x) = 0$, undtagen naar $x = z$, et Udtryk for en symmetrisk Funktion af de Divisorer i n, som høre til Rækken af mærkelige Tal, nemlig

$$\Sigma f(d_z) = \Sigma\left(E \frac{n}{z} - E \frac{n-1}{z}\right) f(z). \tag{117}$$

Sættes her efterhaanden $n = 1, 2, 3 \ldots n$ og summeres, faas den tilsvarende symmetriske Funktion af alle «mærkelige» Divisorer i Tallene fra 1 til n under Formen

$$\Sigma f(d_z) = \sum_1^n{}_z\, E \frac{n}{z} f(z). \tag{118}$$

Er specielt $f(z) = 1$, faas altsaa Antallet af saadanne Divisorer i alle Tal fra 1 op til n. F. Ex. $\Sigma E \frac{n}{p}$ betyder Antallet af alle Divisorer i Tallene $1, 2, 3 \ldots n$, som ere Primtal.

Særlig mærkes, at Summen $\Sigma \mathfrak{P}\left(\frac{n}{x}\right) = \Sigma E \frac{n}{p} + \Sigma E \frac{n}{p^2} + \ldots$ vil angive Antallet af alle de Divisorer i Tallene op til n, som ere Primtalpotenser. Indeholder et af Tallene altsaa f. Ex. p^r som højeste Potens af p, saa vil der fra dette indkomme i Summen r Divisorer, som ere Potenser af p. Den omtalte Sum vil derfor simpelthen angive Antallet af samtlige Primfaktorer i Produktet af Tallene fra 1 til n inkl. Dette vilde ogsaa umiddelbart indses ved at indskrænke de mærkelige Tals Omraade til det ene Primtal p, idet da Summen $E \frac{n}{p} + E \frac{n}{p^2} + E \frac{n}{p^3} \ldots$ vil angive Antallet af Potenser af p, der forekomme som Faktorer i Tallene op til n, med andre Ord Exponenten til den højeste Potens af p, som findes i $[n]$. Man ser umiddelbart, hvorledes denne Exponent kan findes ved at skrive Tallet n i et p-Tal-System. Det er ogsaa en Selvfølge, at den samme Exponent kan udtrykkes ved Hjælp af $E \frac{ln}{lp} = r$.

En højere Grænse for denne Sum faas saaledes

$$E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+E\frac{n}{p^3}+\ldots < n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\frac{1}{p^r}\right) = \frac{n}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}-\frac{n}{p^{r+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

$$\overline{\overline{<}}\ \frac{n}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}-\frac{1}{p\left(p-\frac{1}{p}\right)} = \frac{n-1}{p-1}\,. \tag{118}$$

For af Formlerne (111) til (116) at finde explicite Udtryk for de paa venstre Side indgaaende Funktioner $\theta(x)$ o. s. v., maa Ligningerne vendes om ved Hjælp af Möbius's Faktorer.

For $\theta(x)$ har Bougaïeff angivet Formlen

$$\theta(x) = \Sigma E\frac{n}{a}-2\Sigma E\frac{n}{ab}+3\Sigma E\frac{n}{abc}\ldots-\Sigma E\frac{n}{a^2}+\Sigma E\frac{n}{a^2b}-\Sigma E\frac{n}{a^2bc}+\ldots, \tag{119}$$

som er af en temmelig kompliceret Natur. Men hvad han ikke synes at have bemærket er, at den første Del af Formlen netop angiver $\mathfrak{p}(x)$, Antallet af Primtalpotenser, idet altsaa

$$\mathfrak{p}(x) = \Sigma E\frac{n}{a}-2\Sigma E\frac{n}{ab}+3\Sigma E\frac{n}{abc}-4\Sigma E\frac{abcd}{n}+\ldots \tag{120}$$

Dette kan uden stor Vanskelighed indses ved Induktion, men vi foretrække at bevise det paa en anden Maade, som ogsaa i andre Henseender har Interesse.

Naar $abc\ldots$ betegne de m første Primtal, da vil Antallet af Led i Udviklingen af Produktet $(1+a)(1+b)(1+c)\ldots$ være 2^m, og skriver man Produktet som

$$1+\Sigma a+\Sigma ab+\Sigma abc+\ldots, \tag{121}$$

saa vil Antallet af Leddene i de enkelte Summer angives ved Leddene i Rækken

$$1+m_1+m_2+m_3+\ldots = 2^m,$$

hvor $m_1, m_2, m_3\ldots$ betegne Binomialkoefficienter. Betragter man et Tal N, som alene er sammensat af Potenser af disse m Primfaktorer, saa vil dette af Divisorer forskjellige fra 1, som kun indeholde 1ste Potens af hvert enkelt Primtal, netop have de enkelte Led i (121), det første 1 fraregnet. Betegner man nu Antallet af Divisorer i N af Formen a ved D_a, af Formen ab ved D_{ab}, og bemærkes, at

$$1-m_1+m_2-m_3+\ldots = (1-1)^m = 0,$$

saa er ogsaa for ethvert sammensat Tal

$$1-D_a+D_{ab}-D_{abc}\ldots = 0. \tag{122}$$

Paa lignende Maade faas af Identiteten

$$m_1-2m_2+3m_3-4m_4\ldots = m(1-1)^{m-1} = 0,$$

at

$$D_a-2D_{ab}+3D_{abc}-4D_{abcd}\ldots = 0. \tag{123}$$

Ligeledes er

$$1.2m_2-2.3m_3+3.4m_4\ldots = 0,$$

altsaa ogsaa

$$1.2D_{ab}-2.3D_{abc}+3.4D_{abcd}\ldots = 0, \quad \text{o. s. v.} \tag{124}$$

Disse Formler gjælde for ethvert sammensat Tal. Hvis i den første N er et Primtal, saa faas paa højre Side ogsaa Nul. Adderer man alle de tilsvarende Ligninger for Tallene fra 2 til n, saa faar man altsaa Summen 0. Men Antallet af samtlige Divisorer af Formen a i Tallene fra 1 til n er $\Sigma E\frac{n}{a}$, af Formen ab, $\Sigma E\frac{n}{ab}$ o.s.v., altsaa faas den velbekjendte Ligning (46)

$$n - 1 - \Sigma E\frac{n}{a} + \Sigma E\frac{n}{ab} \dots = 0.$$

Behandles den anden Ligning paa samme Maade, saa ses, at man, hvis N er en Primtalpotens, vil faa 1 i Stedet for 0 paa højre Side af (123), saa at Summation med Hensyn til alle hele Tal giver Antallet af Primtalpotenser

$$\not{p}(n) = \Sigma E\frac{n}{a} - 2\Sigma E\frac{n}{ab} + 3\Sigma E\frac{n}{abc} \dots \tag{125}$$

Leddet $\Sigma E\frac{n}{a}$ kan elimineres ved Hjælp af (46), hvorved faas

$$\not{p}(n) + 1 = n - \Sigma E\frac{n}{ab} + 2\Sigma E\frac{n}{abc} - 3\Sigma E\frac{n}{abcd} \dots \tag{126}$$

Den tredie Formel (124) vilde, behandlet paa samme Maade, give Formlen

$$2\not{p}_2(n) = 1.2\Sigma E\frac{n}{ab} - 2.3\Sigma E\frac{n}{abc} + 3.4\Sigma E\frac{n}{abcd} \dots, \tag{127}$$

hvor $\not{p}_2(n)$ betegner Antallet af Tal, som ere et Produkt af 2 Primtalpotenser.

De saaledes vundne Formler (125)—(127) ere fra det theoretiske Standpunkt ret mærkelige, og de ere ogsaa af Betydning ved den rent numeriske Beregning af Primtalmængden. Men til Afledning af Tilnærmelsesformler egne de sig ikke, det maatte i saa Fald være nødvendigt at præparere dem saaledes, at vi undgik de skiftende Fortegn. Eller ogsaa maatte man først benytte en saadan Funktion af Primtal, at man i en med (125) analog Formel paa højre Side erholdt en bekjendt Funktion eller i det mindste en Funktion, som med Tilnærmelse, hvis Grænser kunde angives, lod sig udtrykke ved bekjendte Funktioner. Det er i Virkeligheden dette, som Tchebycheff har gjort i sin berømte Afhandling: «Mémoire sur les nombres premiers» (1850), som tillige med det to Aar ældre Arbejde: «Note sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée», findes i Liouville's Journal 17 Bd.

Tchebycheff har andetsteds vist, hvorledes man i Almindelighed kan omskrive en Funktion af Formen $\sum_1^\infty f(x)\,lx$ til Formen $\sum_2^n A_p lp$. [1])

Det er lige saa simpelt at betragte Funktionen $\sum_1^n f(x)\,lx$. Det er da klart, at lp vil forekomme som Faktor i alle de Led $f(x)\,lx$, hvor x er delelig med p, og tilmed multipli-

---

[1]) Jvfr. Catalan: Nouv. Corresp. Math. T. IV, p. 308.

ceret med m, hvis $x = p^m . q$. Koefficienten til lp vil derfor faas ved særskilt at udtage de Led, som indeholde p, p^2, p^3 o. s. v. Faktorerne til lp blive da følgende:

$$f(p) + f(2p) + f(3p) + \dots f\left(p \,.\, E\frac{n}{p}\right)$$

$$+ f(p^2) + f(2p^2) + f(3p^2) + \dots f\left(p^2 . E\frac{n}{p^2}\right)$$

$$+ f(p^3) + f(2p^3) + f(3p^3) + \dots f\left(p^3 . E\frac{n}{p^2}\right)$$

o. s. v.,

A_p bliver Summen af alle disse Led, idet man blot har at paase, at intet af Argumenterne overstiger n. Naar man derfor ved mp^t betegner alle de Tal $\overline{\gtrless}\, n$, som indeholde en Potens af p som Faktor, saa kan man skrive

$$\sum_1^n f(x)\, lx = \sum_2^n lp \,.\, \sum_1^n f(mp^t). \tag{128}$$

Er nu $f(x) = 1$, saa faas specielt

$$\sum_1^n lx = \Sigma lp \,.\, f(mp^t) = \Sigma lp \left(E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + E\frac{n}{p^3} + \cdots\right). \tag{129}$$

Denne Ligning, hvor Faktoren til lp simpelthen angiver den højeste Potens af p, som forekommer i $[n]$, kan naturligvis let indses umiddelbart, og ligeledes vilde den kunne faas strax ved Hjælp af (118), men vi have foretrukket at udlede den som specielt Tilfælde af den almindeligere Formel (128), som i og for sig fortjener Opmærksomhed.

Udtrykket for Σlx kan skrives i en anden Form, idet man har

$$\Sigma l(x) = \Sigma E\frac{n}{p}\, lp + \Sigma E\frac{n}{p^2}\, lp + \Sigma E\frac{n}{p^3}\, lp + \dots$$

Men naar nu i (100) $F(x)$ betegner Summen af Logarithmerne af alle Primtal fra 2 til x, z alle hele Tal, $\Phi\left(\frac{n}{x}\right)$ altsaa $= E\frac{n}{x}$, saa ses, at

$$\Sigma E\frac{n}{p}\, lp = F(n) + F\left(\frac{n}{2}\right) + \dots$$

Ligesaa for $F_1(x) = \Sigma lp^2$ faas

$$\Sigma E\frac{n}{p^2}\, lp^2 = F_1(n) + F_1\left(\frac{n}{2}\right) + \dots = 2F(n^{\frac{1}{2}}) + 2F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

eller

$$\Sigma E\frac{n}{p^2}\, lp = F(n^{\frac{1}{2}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Paa lignende Maade bliver

$$\Sigma E\frac{n}{p^3}\, lp = F(n^{\frac{1}{3}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots,$$

saaledes at man endelig erholder

$$\sum_1^n lx = F(n) + F\left(\frac{n}{2}\right) + F\left(\frac{n}{3}\right) + \dots$$
$$+ F(n^{\frac{1}{2}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots$$
$$+ F(n^{\frac{1}{3}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots \quad \text{o. s. v.}$$

Betegne vi nu med Tchebycheff $\sum_1^n lx$ ved $T(n)$ samt Funktionen

$$F(n) + F(n^{\frac{1}{2}}) + F(n^{\frac{1}{3}}) + \dots \quad \text{ved} \quad \psi(n), \tag{130}$$

saa faas altsaa

$$T(n) = \psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \psi\left(\frac{n}{4}\right) + \dots = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right). \tag{131}$$

I Funktionen $\psi(n)$ indgaar aabenbart hvert enkelt Primtals Logarithme saa mange Gange som Addend, som angives ved den højeste Potens af p, der er lig eller mindre end n, saaledes at man ogsaa kan skrive

$$\psi(n) = \Sigma lp \,.\, E\frac{ln}{lp}. \tag{132}$$

Ligeledes kan ifølge (91) og (92) $T(n)$ skrives som

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n}{x+1}\right)\psi(x) = \sum_1^n (\psi(x) - \psi(x-1))\, E\frac{n}{x}. \tag{133}$$

Det er de to Ligninger (130) og (131):

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right) \quad \text{og} \quad \psi(n) = \sum_1^n F\left(n^{\frac{1}{x}}\right),$$

som Tchebycheff har lagt til Grund for sine Undersøgelser[1]), de tilstede i Virkeligheden ved en dobbelt Anvendelse af Möbius's Faktorer at bestemme Funktionen $F(n)$, som Tchebycheff for øvrigt betegner ved $\theta(n)$.

Af (131) afledes en ny Identitet ved at danne Differensen $T(n) - T(n-1)$. Paa venstre Side faas derved ln, paa højre Side $\Sigma\left(\psi\left(\frac{n}{x}\right) - \psi\left(\frac{n-1}{x}\right)\right)$. Men Differensen $\psi\left(\frac{n}{x}\right) - \psi\left(\frac{n-1}{x}\right)$ vil altid være lig 0, undtagen naar $\frac{n}{x}$ er en Potens af et Primtal. Er $\frac{n}{x} = p^m$, saa bliver Differensen $lp = \frac{1}{m} l\frac{n}{x}$, saa at man, naar som tidligere $\tilde{\omega}(x)$ betegner en Funktion, som er lig $\frac{1}{m}$, naar $x = p^m$, og i alle andre Tilfælde lig 0, kan sætte

$$ln = \sum_1^n \tilde{\omega}\left(\frac{n}{x}\right) l\frac{n}{x}. \tag{134}$$

---

1) Mémoire sur les nombres premiers. Liouville's Journal, Tome 17; jfr. Serret: Cours d'Algèbre supérieure, 3. éd. T. II, p. 202.

Det andet Udtryk for $T(n)$ i (133) giver paa lignende Maade, idet

$$T(n) = \sum_1^n (\psi(x) - \psi(x-1))\, E\frac{n}{x} = \sum_1^n E\frac{n}{x}\, \tilde{\omega}(x)\, lx\,, \tag{135}$$

Formlen

$$ln = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right) \tilde{\omega}(x)\, lx = \Sigma\, \tilde{\omega}(d)\, ld\,, \tag{136}$$

hvor d betegner alle Divisorer i n, og Summationen udføres med Hensyn til disse.

Disse Udtryk for ln ere saa at sige umiddelbart indlysende, og man kunde derfor ogsaa benytte dem som Udgangspunkt til Bevis for de Tchebycheff'ske Ligninger (130) og (131).

Hvad der imidlertid bør særlig fremhæves paa dette Sted er, at disse Ligninger ret beset indeholde Definitioner af Funktionen $\tilde{\omega}(x)$, idet denne skal være en saadan Funktion, at den symmetriske Funktion $\Sigma\, \tilde{\omega}(d)\, ld$, dannet af alle Divisorer i Tallet n, faar Værdien ln. Kan derefter $\tilde{\omega}(x)$ bestemmes nøjagtig eller tilnærmelsesvis, saa vil altsaa $\sum_1^n \tilde{\omega}(x)$ give et Udtryk, ikke for selve Primtalmængden $\theta(n)$, men for Funktionen $\vartheta(n)$, den samme Funktion, for hvilken Riemann ad ganske anden Vej finder en Formel. Der er derved knyttet et interessant Baand imellem disse to saa forskjelligartede Undersøgelser, og netop Tilstedeværelsen af denne Forbindelse giver en Antydning af, at det virkelig er Funktionen $\vartheta(n)$, som man navnlig bør fæste Opmærksomheden paa, fordi den tilsteder en simplere analytisk Bestemmelse end selve $\theta(n)$.

Inden vi forlade dette Thema, skulle vi endnu anføre nogle mærkelig udseende Identiteter, der faas som simple Følger af Berger's og Césaro's Sætninger i den udvidede Form.

Ifølge (113) er, naar $\theta_2(x)$ betegner Antallet af Tal af Formen ab, d. e. Produkter af to Primtal

$$\theta_2(n) + \theta_2\left(\frac{n}{2}\right) + \theta_2\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{ab}\,,$$

og paa lignende Maade kan findes Ligninger for $\theta_3(x)$, Antallet af Tallene abc, op til x o. s. v. Men hvad vi navnlig her ville fremhæve, er, at $\theta_2(n)$ kan udtrykkes ved $\theta(n)$. Dannes nemlig Summen

$$\theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) + \theta\left(\frac{n}{5}\right) + \theta\left(\frac{n}{7}\right) + \ldots = \Sigma\theta\left(\frac{n}{p}\right),$$

saa vil denne let ses at angive Antallet af Tal af Formen ab, tagne 2 Gange, + Antallet af Primtalkvadrater op til n, eller

$$\Sigma\theta\left(\frac{n}{p}\right) = 2\,\theta_2(n) + \theta(n^{\frac{1}{2}})\,, \tag{137}$$

en Relation, som i ufuldstændig Form er fundet af Bougaïeff. Lignende, men mere sammensatte Formler kunne findes for $\theta_3(x)$ o. s. v.

Sætter man dernæst i (98) $F(x) = \theta(x)$, $z = p$, altsaa $\Phi(x) = \theta(x)$, saa faas

$$\sum_1^a \theta\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta(a)\,\theta(q). \tag{138}$$

Specielt for $a = E\sqrt{n} = q$ faas, ved tillige paa begge Sider at addere $\sum_1^q \theta\left(\frac{n}{p}\right)$ eller $\sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right)$,

$$2\sum_1^q \theta\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_1^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta^2(n^{\frac{1}{2}}),$$

eller ogsaa

$$\sum_1^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) = 2\sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta^2(n^{\frac{1}{2}}),$$

som i Forbindelse med (137) giver den mærkelige Relation

$$2\sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta^2(q) = 2\theta_2(n) + \theta(q). \qquad (q = E\sqrt{n}). \tag{139}$$

Ligeledes følger af (98) ved at sætte $F(x) = \theta^2(x)$, $z = x$

$$\sum_1^a \theta^2\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_{q+1}^n (\theta^2(x) - \theta^2(x-1))\,E\frac{n}{x} + a\,\theta^2(q) = \sum_{q+1}^n (2\,\theta(p) - 1)\,E\frac{n}{p} + a\,\theta^2(q). \tag{140}$$

Er tillige $z = p$, bliver Formlen til

$$\sum_1^a \theta^2\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_{q+1}^n (2\,\theta(p) - 1)\,\theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta(a)\,\theta^2(q), \tag{141}$$

og specielt for $a = n$

$$\sum_1^n \theta^2\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_1^n 2\,\theta(p)\,\theta\left(\frac{n}{p}\right) - \sum_1^n \theta\left(\frac{n}{p}\right). \tag{142}$$

Er endelig $F(x)$ Summen af Primtallene op til x, saa bliver

$$\sum_1^a F\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_{q+1}^n pE\frac{n}{p} + aF(q); \qquad \sum_1^a F\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_{q+1}^n p\,\theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta(a)\,F(q), \tag{143}$$

og for $a = n$

$$\sum_1^n F\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n pE\frac{n}{p}; \qquad \sum_1^n F\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_1^n p\,\theta\left(\frac{n}{p}\right). \tag{143'}$$

I Forbindelse hermed anføres som Exempel paa Tchebycheff's Formel (128), at

$$\sum_1^n E\frac{n}{x}\,lx = \Sigma lp \Sigma E\frac{n}{mp^t} = T(n) + T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + \dots, \tag{144}$$

og at

$$\sum_2^n \frac{lx}{lx} = \Sigma_p lp \Sigma_m \Sigma_t \frac{1}{lm + tlp} = n - 1. \tag{144'}$$

§ 6. Tilnærmet Bestemmelse af Funktionen $\tilde{\omega}(x)$.

Enhver af de ovenfor udviklede Formler (134)—(136) giver tilstrækkelige Data til Bestemmelsen af $\tilde{\omega}(x)$ eller, naar $\tilde{\omega}(x) lx$ betegnes ved $\tau(x)$, af denne Funktion, hvis Værdi i Virkeligheden er 0, undtagen naar $x = p^m$, da den er lp. Ved at indføre $\tau(x)$ i Formlerne, kunne disse skrives som

$$ln = \sum_1^n \tau\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right)\tau(x) = \Sigma\tau(d). \tag{145}$$

Vi skulle betragte hvert af disse Udtryk for sig.

For af det første at bestemme $\tau(x)$, maatte Formlen

$$ln = \tau\left(\frac{n}{1}\right) + \tau\left(\frac{n}{2}\right) + \tau\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots \tau\left(\frac{n}{n}\right)$$

vendes om ved Hjælp af Möbius's Faktorer, idet man erindrer, at $\tau(x)$ kun har Betydning for $\frac{n}{x}$ hel, altsaa naar de under Funktionstegnet τ indgaaende Argumenter ere hele Tal. I Virkeligheden bør derfor alle de Led, hvor Nævnerne ikke ere Divisorer i n, udelades. Men naar Formlerne derefter vendes om, saa føres vi identisk tilbage til $\tau(n)$ udtrykt ved Primtallogarithmer, saaledes som det vil ses af et Exempel for $n = 12$. Man faar nemlig da

$$\begin{aligned}
l\,12 &= \tau 12 + \tau\left(\frac{12}{2}\right) + \tau\left(\frac{12}{3}\right) + \tau\left(\frac{12}{4}\right) + \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right) \\
l\left(\frac{12}{2}\right) &= \tau\left(\frac{12}{2}\right) + \tau\left(\frac{12}{4}\right) + \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right) \\
l\left(\frac{12}{3}\right) &= \tau\left(\frac{12}{3}\right) + \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right) \\
l\left(\frac{12}{6}\right) &= \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right),
\end{aligned}$$

altsaa identisk $l\,12 - l\frac{12}{2} - l\frac{12}{3} + l\frac{12}{6} = \tau(12)$.

Der opnaas altsaa ad denne Vej ikke nogen væsentlig ny Bestemmelse af $\tau(x)$. Derimod kunde man tænke sig, at man muligvis kunde faa en Tilnærmelsesformel for τ ved at søge Værdien af en Funktion $t(x)$ bestemt ved Ligningen

$$ln = t\left(\frac{n}{1}\right) + t\left(E\frac{n}{2}\right) + t\left(E\frac{n}{3}\right) + \ldots t\left(E\frac{n}{n}\right),$$

som giver

$$t(n) = \sum_1^n \mu(x)\, l E\frac{n}{x}.$$

Men bortset fra, at dette Udtryk for $t(n)$ er noget kompliceret, kan man ikke være sikker paa, at det Resultat, man faar, vil være en virkelig Tilnærmelsesværdi for $\tau(n)$, navnlig fordi $t(n)$ kan blive negativ (f. Ex. for $n = 9$). Vi vende os derfor til det andet Udtryk i (145)

$$ln = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x} \right) \tau(x).$$

Dette giver os strax en Forestilling om den gjennemsnitlige Værdi af $\tau(x)$. Sætter man paa lignende Maade som før for $\tau(x)$ en Gjennemsnitsværdi af de paa hinanden følgende τ i Nærheden af x, saa vil hvert enkelt Led i denne Formel ogsaa give en Gjennemsnitsværdi af det tilsvarende Led i den oprindelige Sum. Bestemmer man altsaa Funktionen $t(x)$ ved Formlen

$$ln = \sum_1^n \frac{1}{x} t(x),$$

saa er man berettiget til at formode, at $t(x)$ vil paa det nærmeste angive Middelværdien af Funktionen $\tau(x)$ i Nærheden af x. Men nu faas strax

$$\frac{1}{n} t(n) = ln - l(n-1),$$

eller

$$t(n) = nl\frac{n}{n-1} = nl\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \ldots, \tag{146}$$

som for voxende n nærmer sig stærkt til Grænsen 1.

Skjønt disse Betragtninger ikke kunne opfattes som noget egentligt Bevis, vil det dog være ret oplysende at gjøre en Prøve paa Nøjagtigheden af Formlen for $t(n)$ ved at indsætte det fundne Udtryk i Formlen for $T(n)$ (135). Da Udtrykket for $t(n)$ ikke gjælder for $n = 1$, maa Summen tages fra $x = 2$, og man har altsaa, at denne Sum er

$$S(n) = \sum_2^n E\frac{n}{x} t(x).$$

Men nu er

$$\sum_2^n \frac{n}{x} \cdot xl\frac{x}{x-1} > S(n) > \sum_2^n \left(\frac{n}{x} - 1\right) xl\frac{x}{x-1},$$

eller, da $n\sum_2^n l\frac{x}{x-1} = nln$ og

$$\sum_2^n \left(\frac{n}{x} - 1\right) xl\frac{x}{x-1} = nln - \sum_2^n (xlx - xl(x-1)) = nln - \sum_2^n (xlx - (x-1)\,l(x-1) - l(x-1))$$
$$= nln - nln + l[n-1],$$

faas endelig

$$nln > S(n) > l[n-1].$$

Den tilsvarende Sum, dannet af $\tau(x)$, er $T(n) = l[n] = nln + \frac{1}{2}ln - n + l\sqrt{2\pi} + \frac{\varepsilon}{12n}$, altsaa ogsaa

$$nln > T(n) > l[n-1].$$

Da saaledes $S(n)$ og $T(n)$ ligge mellem de samme Grænser, hvis Differens omtrent er $n - \frac{1}{2}ln - l\sqrt{2\pi}$, saa vil den gjennemsnitlige Afvigelse mellem $\tau(x)$ og $t(x)$ for alle de i $T(n)$ indgaaende $\tau(x)$ ikke kunne overstige $n : \sum_2^n E\frac{n}{x}$, eller den bliver af Ordenen $\frac{1}{ln}$.

Da dette gjælder for alle Værdier af n, vil man være berettiget til at anse $t(x)$ som repræsenterende en Tilnærmelse til de Værdier, som vilde faas ved at udjevne Værdierne af $\tau(n)$ ved en Formel, som ikke tilsteder Vendepunkter, saa at altsaa denne Funktion tilnærmelsesvis maa anses for at være konstant lig 1.

Til det samme Resultat leder det tredie Udtryk i (145)

$$ln = \Sigma\tau(d).$$

Naar man ogsaa her erstatter $\tau(x)$ ved $t(x)$, hvor $t(x)$ har en lignende Betydning som ovenfor, saa skal $t(d)$ være en saadan Funktion, at den symmetriske Funktion $\Sigma t(d)$ faar Middelværdien ln for Tallene i Nærheden af n.

Nu har Berger ved Hjælp af (101) bevist, at naar g bestemmes saaledes, at for $n = \infty$ $\lim\frac{g}{n} = 0$, men $\lim\frac{\sqrt{n}}{g} = 0$, saa vil Middelværdien af Antallet af Divisorer i Tallene mellem $n - g$ og $n + g$ nærme sig til Grænsen $ln + 2C$ (jvfr. S. 37). Udelades Divisoren 1, som forekommer i alle Tallene, bliver Middelværdien $ln + 2C - 1$, og denne Værdi vilde altsaa blive Middelværdien af $\Sigma t(d)$, for saa vidt $t(x) = 1$. Denne Middelværdi er lidt større, end den skulde være, men da det tillige er bevist, at Middelværdien af $\Sigma\frac{1}{d}$ er $\frac{\pi^2}{6}$, eller, naar Divisoren 1 udelades, $\frac{\pi^2}{6} - 1$, saa kunne vi sætte

$$t(n) = 1 - \frac{2C-1}{\frac{\pi^2}{6}-1}\cdot\frac{1}{n} = 1 - \frac{k}{n}. \tag{147}$$

Ogsaa dette Udtryk nærmer sig for voxende n til Grænsen 1.

Da $\sum_1^n\frac{1}{x}E\frac{n}{x} < n\sum_1^n\frac{1}{x^2}$ og $> n\sum_1^n\frac{1}{x^2} - \sum_1^n\frac{1}{x}$, saa faas, ved at indsætte $1 - \frac{k}{x}$ i Formlen (135) i Stedet for $\tau(x)$, at

$$T(n) - \sum_1^n E\frac{n}{x}\left(1 - \frac{k}{x}\right) = \rho\sqrt{n} + \text{Led af lavere Orden,}$$

saa at Afvigelsen mellem $T(n)$ og $\Sigma E\frac{n}{x}t(x)$ her kun bliver af Ordenen $\sqrt{n}$.

Alle de her anvendte Fremgangsmaader føre altsaa til det Resultat, at $t(n)$ for store n nærmer sig til Grænsen 1, og at altsaa Middeltætheden af dividerede Primtalpotenser (eller af $\tilde{\omega}(n) = \vartheta(n) - \vartheta(n-1)$) nærmer sig til Grænsen $\frac{1}{ln}$, naar n voxer. Dog kunne disse Udviklinger ikke anses for fyldestgjørende Beviser for denne Sætning, bl. a. af den Grund, at Overgangen fra $\tau(n)$ til $t(n)$ ikke er tilstrækkelig skarpt bestemt.

Denne Indvending kan ikke gjøres mod den følgende Fremgangsmaade, hvor vi direkte benytte Formlen (135)

$$T(n) = \sum_1^n E\frac{n}{x}\tau(x) = \sum_2^n E\frac{n}{x}\tau(x).$$

I denne Formel indgaa nemlig lineært alle Funktionerne $\tau(x)$ fra $x = 1$ eller 2 til $x = n$. Opfattes altsaa Koefficienterne $E\frac{n}{x}$ som Vægte, saa kan der, da $T(n)$ er bekjendt og $\Sigma E\frac{n}{x}$ ogsaa kan betragtes som bekjendt, findes en virkelig Middelværdi af alle disse $\tau(x)$, hvor dog de, der svare til de laveste x, faa størst Indflydelse, eftersom Vægtene omtrent ere proportionale med $\frac{1}{x}$. Betegne vi denne Middelværdi ved $\tau_1(n)$, saa er altsaa, idet $\tau(1)$ ikke medregnes

$$\tau_1(n) = \frac{T(n)}{\sum\limits_2^n E\frac{n}{x}} \,. \tag{148}$$

Erstatter man her Tæller og Nævner ved de tilnærmende Udtryk (20) og (105), faas

$$\tau_1(n) = \frac{nln - n + \frac{1}{2}ln + l\sqrt{2\pi} + \frac{\varepsilon}{12n}}{nln + (2C-2)n + \lambda\sqrt{n}}$$

eller

$$\tau_1(n) = \frac{1 - \frac{1}{ln} + \frac{1}{2n} + \frac{k}{nln}}{1 + \frac{2C-2}{ln} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}\,ln}} \,,$$

altsaa, naar Divisionen udføres,

$$\tau_1(n) = 1 - \frac{2C-1}{ln} - \frac{2C-2}{(ln)^2} + R \,, \tag{149}$$

hvor R betegner en Rest, der er af lavere Orden end $\frac{1}{\sqrt{n}}$, saa at altsaa Lim $R\sqrt{n} = 0$ for $n = \infty$.

De til de laveste Værdier af x svarende $\tau(x)$ have den største Indflydelse ved Dannelsen af denne Middelværdi, og da det andet og tredie Led ville optræde med modsatte Fortegn, og deres Indflydelse altsaa gaar i modsat Retning, saa vil Middelværdien $\tau_1(n)$ allerede for lave Værdier af n være nær ved 1, og hvis man tænkte sig, at Middelværdien dannedes med andre Vægte end de her anvendte, saa vilde dette Forhold aabenbart ikke kunne forrykkes meget, da Formlen gjælder for alle n. For store Værdier faar $\tau(x)$ vel en mindre Vægt, men til Gjengjæld faar den, for saa vidt x er et Primtal, en større numerisk Værdi. Man ledes derfor til den Antagelse, at væsentlig den samme Middelværdi maatte komme frem, selv om Vægtene vare ligestore og Middeltallet ikke dannedes af alle $\tau(x)$ fra 2 til n, men alene af dem i Nærheden af n.

Det er i Virkeligheden ikke vanskeligt at danne et Middeltal, hvor de enkelte indgaaende τ optræde med ligestore Vægte, og hvor de til de største x svarende τ faa den største Indflydelse.

Dette faas ved Betragtning af Identiteten

$$T(n) - 2T\left(E\frac{n}{2}\right) = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)\tau(x). \tag{150}$$

For Simpelheds Skyld antage vi, at n er et lige Tal samt $n = ax + r$ $(r < x)$. Da bliver Differensen

$$E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x} = \begin{cases} 0 \text{ for } a \text{ lige} \\ 1 \text{ for } a \text{ ulige.} \end{cases} \tag{151}$$

Koefficienterne til $\tau(x)$ i (150) blive altsaa alle 0 eller 1, og navnlig ses, at for alle Værdier af $x > \frac{n}{2}$ bliver Koefficienten altid 1, medens den for lavere x kun bliver 1 for dem, der give et ulige Tal for Kvotienten $E\frac{n}{x}$. For $n = 10$ faas f. Ex.

$$\begin{aligned} T(10) - 2T(5) = {} & 0.\tau(1) + 1.\tau(2) + 1.\tau(3) + 0.\tau(4) + 0.\tau(5) + 1.\tau(6) + 1.\tau(7) + 1.\tau(8) \\ & + 1.\tau(9) + 1.\tau(10). \end{aligned} \tag{152}$$

Danne vi altsaa Middelværdien af alle de i (150) indgaaende τ ($\tau(1)$ undtagen), saa vil denne Middelværdi, som vi ville betegne med $\tau_2(n)$, fortrinsvis afhænge af de τ, der svare til Tallene mellem n og $\frac{n}{2}$. Denne Middelværdi vil fremstilles ved

$$\tau_2(n) = \frac{T(n) - 2T\left(\frac{n}{2}\right)}{\sum\limits_2^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)}. \tag{153}$$

Nu er $T(n) - 2T\left(\frac{n}{2}\right) = nln - n + \frac{1}{2}ln + l\sqrt{2\pi} + \frac{\lambda}{12n} - nl\frac{n}{2} + n - l\frac{n}{2} - 2l\sqrt{2\pi} - \frac{\lambda'}{3n}$

$$= nl2 - \frac{1}{2}ln - l\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\lambda''}{n}, \tag{154}$$

samt, paa en ubetydelig Brøk nær, ifølge (104) eller (105),

$$\sum_2^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right) = nl2 \pm \rho\sqrt{n}. \tag{155}$$

Følgelig faas

$$\tau_2(n) = \frac{nl2 - \frac{1}{2}ln - l\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\lambda''}{n}}{nl2 \pm \rho\sqrt{n}} = 1 \pm \frac{\rho}{l2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2l2}\frac{ln}{n} + \ldots \tag{156}$$

Man ser, at Afvigelsen af denne Middelværdi fra 1 kun er af Ordenen $\frac{1}{\sqrt{n}}$, og at den altsaa nærmer sig stærkere til 1 end den ovenfor fundne $\tau_1(n)$. Da dette gjælder for alle n, kan der herefter ikke være nogen Tvivl om, at man kun begaar en ringe Fejl ved at sætte Middelværdien af $\tau(x)$ for et stort Antal paa hinanden følgende Værdier af x lig med 1.

Tillige ses, at Summen af Afvigelserne mellem de enkelte τ og 1 bliver

$$\sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)(\tau(x) - 1) = \pm\rho\sqrt{n} - \frac{1}{2}ln - l\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\lambda''}{n}, \tag{157}$$

og altsaa af Ordenen $\sqrt{n}$.

Ogsaa for Afvigelsernes Kvadratsum lader der sig uden Vanskelighed angive i det mindste en højere Grænse, men de fundne Middelværdier ere alligevel ikke, hvad man maatte ønske. Det, man skulde tilstræbe, var nemlig at erholde Middeltal og Middelafvigelse fra dette for en Række $\tau(x)$ for alle x fra en vilkaarlig valgt lavere Grænse m til n, helst med ligestore Vægte.

Hvis Vægtene sættes proportionale med $\frac{1}{x}$, da kan dette gjøres, idet man af (135) erholder

$$\frac{1}{n} T(n) < \sum_{2}^{n} \frac{1}{x} \tau(x) < \frac{1}{n} T(n) + \frac{1}{n} \psi(n), \tag{158}$$

hvoraf der i Virkeligheden lader sig finde Grænser for Summen $\sum_{m}^{n} \frac{1}{x} \tau(x)$. Men disse Grænser ville dels komme til at afhænge af Tchebycheff's Grænser for $\psi(n)$, som lide af væsentlige Mangler, og dels ville de ogsaa paa Grund af selve Beskaffenheden af Formlen blive altfor vide, til at man kan have nogen reel Nytte af dem. Det vil ialfald være bedre at benytte selve Funktionen $\psi(n) = \sum_{2}^{n}{}' \tau(x)$.

---

§ 7. Funktionen $\psi(x)$.

For saa vidt det kunde betragtes som fuldstændig sikkert, at Middelværdien af alle $\tau(x)$ fra $x = 2$ til $x = n$ er lig 1, saa vil Funktionen $\psi(n)$ være lig $n - 1 \pm$ en Rest af lavere Orden end n. Dette vil, uanset de andre $\tau(x)$, ogsaa være Tilfældet, hvis blot Middelværdien af de τ, som ikke forekomme i Summen $\Sigma\left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)\tau(x)$, har Grænsen 1. Disse τ ere nemlig de, der svare til saadanne x, for hvilke Kvotienten $E\frac{n}{x}$ er et lige Tal $2m$, og Differensen mellem $\psi(n)$ og den angivne Sum vil derfor være Summen af en Række Udtryk af Formen $\left[\tau\left(E\frac{n}{2m+1}+1\right) + \tau\left(E\frac{n}{2m+1}+2\right) \ldots + \tau\left(E\frac{n}{2m}\right)\right]$ taget for alle m fra 1 og opad. For $\tau(m) = 1$ vilde denne Sum ændres til $\Sigma\left(E\frac{n}{2m} - E\frac{n}{2m+1}\right)$, der tilnærmelsesvis kunde omskrives til

$$n \,.\, \Sigma\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots \pm \frac{1}{n}\right). \tag{159}$$

Rækken under Parenthesen er med en Fejl af en Brøkdel af $\frac{1}{n}$ lig $1 - l2$, saaledes at man for den søgte Sum tilnærmelsesvis vilde erholde $(1 - l2)n$, og dette adderet til $T(n) - T\left(\frac{n}{2}\right)$ vilde give

$$n - \frac{1}{2} ln + l2 - l\sqrt{2\pi}$$

med en Fejl, som vilde kunne findes, ialfald med Tilnærmelse, hvis Afvigelsen af Middelværdien af de udeladte τ var bekjendt. Men denne Fejl kjendes ikke tilstrækkelig nøjagtig, til at man kan bygge noget paa den, og det bliver derfor ønskeligt at undersøge, om man ikke direkte kan bestemme $\psi(n)$ ad anden Vej.

Det ligger da nær at forsøge at benytte Ligningen (131)

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right)$$

i dette Øjemed. Denne giver, efter Omvending ved Möbius's Faktorer, strax

$$\psi(n) = \Sigma\mu(x)\, T\left(E\frac{n}{x}\right) = T(n) - T\left(E\frac{n}{2}\right) - T\left(E\frac{n}{3}\right) - T\left(E\frac{n}{5}\right) + T\left(E\frac{n}{6}\right) \ldots \quad (160)$$

som exakt Udtryk for $\psi(n)$. Men at udlede en Tilnærmelsesformel af dette er meget vanskeligt, navnlig paa Grund af, at de diskontinuerte Argumenter forhindre en Differentiation, som ellers strax vilde tilvejebringe mere handelige Funktionsformer end de, hvortil $T(x)$ uden videre reduceres.

Det er dog lykkedes Tchebycheff[1]) ved en overordentlig sindrig Fremgangsmaade at tilvejebringe Grænser for $\psi(n)$ af denne Ligning, og for Fuldstændigheds Skyld skulle vi ganske kort antyde, hvorledes han gaar frem, saa meget mere, som hans Methode ogsaa i andre Tilfælde lader sig anvende til en Grænsebestemmelse for Funktioner, som faas ved lignende Omvendinger.

Naar man nemlig har forelagt et System af Ligninger, som

$$Y_1 = \Sigma X_r$$
$$Y_2 = \Sigma X_{2r}$$
$$Y_3 = \Sigma X_{3r} \quad \text{o. s. v.,}$$

og man om de søgte X ved, at de danne en aftagende Række, altsaa $X_1 > X_2 > X_3 \ldots$, og man derefter danner Summen

$$\sigma = Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_5 + Y_{30},$$

saa findes σ udtrykt ved X'erne at være

$$\sigma = X_1 - X_6 + X_7 - X_{10} + X_{11} - X_{12} + X_{13} - X_{15} + X_{17} - X_{18} + X_{19} - X_{20} + X_{23} - X_{24} + X_{29} - X_{30} + \ldots,$$

hvorefter der følge X med Indices, som give de samme Rester ved Division med 30 og med ganske de samme Fortegn som de, der optræde i den angivne første Periode, altsaa saaledes, at hvert andet Fortegn er $+$, hvert andet $-$. Naar det nu er givet, at X'erne danne en aftagende Række, saa kan man ved at afbryde denne Række paa et

[1]) Mémoire sur les nombres premiers. Liouvilles's Journal T. 17.

hvilket som helst Punkt angive en Grænse for den derved begaaede Fejl, og navnlig har man de to Uligheder

$$\sigma < X_1 , \quad \text{og} \quad \sigma > X_1 - X_6 ,$$

da de bortkastede Led i første Tilfælde have en negativ, i sidste en positiv Sum.

Anvendt paa det foreliggende Tilfælde faas, idet ved $t(n)$ betegnes

$$T(n) - T\left(E\frac{n}{2}\right) - T\left(E\frac{n}{3}\right) - T\left(E\frac{n}{5}\right) + T\left(E\frac{n}{30}\right) , \tag{161}$$

at

$$t(n) < \psi(n) < t(n) + \psi\left(\frac{n}{6}\right). \tag{162}$$

Ved derefter først at vise, at

$$T(E) = l\sqrt{2\pi} + xlx - x \pm \frac{1}{2} klx + \frac{\theta}{12} , \quad \text{hvor } k < 1 , \tag{163}$$

finder Tchebycheff først Grænser for $t(n)$, nemlig

$$An + \frac{5}{2} ln > t(n) > An - \frac{5}{2} ln - 1 , \tag{164}$$

hvor

$$A = \frac{1}{2} l2 + \frac{1}{3} l3 + \frac{1}{5} l5 - \frac{1}{30} l30 = 0{\cdot}92129202\ldots , \tag{165}$$

og derefter for $\psi(n)$

$$\frac{6}{5} An + \frac{5}{4l6} (ln)^2 + \frac{5}{4} ln + 1 > \psi(n) > An - \frac{5}{2} ln - 1. \tag{166}$$

Væsentlig den samme Methode er anvendt af Sylvester[1]) og ligeledes af Dr. Jul. Petersen[2]).

Sylvester giver en ringe Forbedring af Tchebycheff's Grænser, men noget væsentligt har hverken han eller nogen anden af de senere Forfattere opnaaet, navnlig har ingen af dem været i Stand til at faa Faktoren til n i Grænserne for $\psi(n)$ erstattet ved 1, hvilket uden Tvivl maa kunne gjøres. I Virkeligheden synes det, som om Tchebycheff's Fremgangsmaade ikke kan udvikles videre; at den har kunnet føre saa vidt, beror paa, at man ved Dannelsen af Summen σ kan faa en Række af X med skiftende Fortegn, og at danne en lignende Række, hvor flere af de første efter X_1 følgende X mangle, synes ikke at være muligt ved at kombinere forskjellige Y.

Vi vende os derfor til de andre Maader, som kunne tjene til Bestemmelsen af $\psi(n)$. Betragtes først Formlen (132)

$$\psi(n) = \Sigma lp E\frac{ln}{lp} ,$$

saa giver denne ganske vist Grænser for $\psi(n)$, nemlig

---

[1]) On Tchebycheff's theorem of the totality of the prime numbers comprised within given limits. American Journal of mathematics. Vol. IV.

[2]) Om Primtal. Tidsskrift for Mathematik 1882. S. 138.

$$\Sigma\left(\frac{ln}{lp}-1\right)lp = \theta(n)ln - \Sigma lp < \psi(n) < \Sigma\frac{ln}{lp}\cdot lp = \theta(n)ln\,, \tag{167}$$

eller, hvis man antager n delelig med nogle af de første Primtal (f. Ex. 2, 3, 5, altsaa $n \equiv 0$ mod. 30),

$$\theta(n)ln - \sum_{7}^{n} lp < \psi(n) < \theta(n)ln\,, \tag{167'}$$

men denne Formel har ved Bestemmelsen af Grænserne for ψ ingen Betydning, hvorimod den nok, naar disse vare bekjendte, kunde benyttes til at finde Grænser for θ.

Direkte at bestemme $\psi(n)$ ved at vende Formlen (131)

$$\psi(n)+\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots = T(n)$$

om, efter at det bekjendte Udtryk $T(n) = nln - n + l\sqrt{2\pi}$ o. s. v. indsættes for T, vil ikke kunne føre til noget, da man ikke kan angive Grænser for de enkelte Leds Fejl i det Udtryk, som Omvendingen vilde give.

Bedre vilde det ialfald være at erstatte $T(n)$ ved et Udtryk, i hvilket $\Sigma E\frac{n}{x}$ indgik. Da nemlig

$$T(n) = nln - n + l\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}ln + \frac{\lambda}{12n}$$

og

$$\sum_{1}^{n} E\frac{n}{x} = nln + (2C-1)n + \rho\sqrt{n}\,,$$

saa kan man sætte

$$T(n) = \sum_{1}^{n} E\frac{n}{x} - 2Cn + \rho'\sqrt{n}\,, \tag{168}$$

hvor ρ kan betragtes som en Størrelse, der altid ligger indenfor let angivelige konstante Grænser. Af denne Formel faas

$$\psi(n) = n - 2C + \Sigma\mu(x)\rho_x\sqrt{\frac{n}{x}}\,. \tag{169}$$

Men for at finde Grænser for det her optrædende Restled maatte man først for ρ_x sætte den største positive eller negative Værdi, som ρ kunde have, og derefter for sig summere de positive og de negative Led, hvorved vilde faas en højere og lavere Grænse. I Stedet for disse kan man ogsaa benytte videre Grænser af Formen $\pm\rho\sqrt{n}\sum_{1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x}}$. Men Summation af Rækken $\sum_{1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x}}$ giver en Størrelse af samme Orden som $\int_{1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x}}\,dx = 2(\sqrt{n}-1)$, saa at Grænserne for $\psi(n)$ vilde blive af Ordenen n ligesom hos Tchebycheff, og selv om vi kun udførte Summationen for de positive $\mu(x)$, saa vilde vi derfor ikke komme til væsentlig bedre Grænser, med mindre man blev i Stand til ogsaa at tage Hensyn til Fortegnet for ρ_x, eller ogsaa der for Afvigelsen mellem $T(n)$ og $\Sigma E\frac{n}{x}$ kunde findes en Grænse af lavere Orden end $\sqrt{n}$.

Det ligger nær at benytte Formlen $T(n) = \sum_1^n lx$ ved Omvendingen. Derved faas følgende Ligninger

$$\psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \psi\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots \psi\left(\frac{n}{n}\right) = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots ln$$

$$\psi\left(\frac{n}{2}\right) \qquad + \psi\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots \quad = \quad l2 \qquad + l4 + \ldots \quad - E\frac{n}{2} l2$$

$$+ \psi\left(\frac{n}{3}\right) \qquad + \psi\left(\frac{n}{6}\right) + \ldots = \qquad l3 \qquad + l6 + \ldots - E\frac{n}{3} l3$$

o. s. v.

Deraf faas ved Anvendelse af Möbius's Faktorer

$$\psi(n) = E\frac{n}{2}.l2 + E\frac{n}{3}.l3 + E\frac{n}{5}.l5 - E\frac{n}{6}.l6 + E\frac{n}{7}.l7 + \ldots = -\sum_1^n \mu(x) E\frac{n}{x}.lx, \quad (170)$$

som ogsaa i en anden Form angivet af Dr. Petersen.

Dette Udtryk er nær beslægtet med den af Möbius fundne Formel (33)

$$1 = \frac{1}{2} l2 + \frac{1}{3} l3 + \frac{1}{5} l5 - \frac{1}{6} l6 + \frac{1}{7} l7 + \ldots,$$

men vi træffe her atter paa en lignende Vanskelighed som ved Rækken (28), idet nemlig Formlen for $\psi(n)$ snarere kan bruges til at bevise Konvergensen af Möbius's Række, end denne omvendt til at finde Værdien af $\psi(n)$.

Der kunde endelig være Tale om at benytte Formlen

$$T(n) = \Sigma\psi\left(\frac{n}{x}\right) = \Sigma\left(E\frac{n}{x} - E\frac{n}{x+1}\right)\psi(x)$$

$$= \left(E\frac{n}{2} - E\frac{n}{3}\right)\psi(2) + \left(E\frac{n}{3} - E\frac{n}{4}\right)\psi(3) + \ldots \psi(n),$$

men heller ikke denne fører til noget bedre Resultat end de andre, om end en Tilnærmelsesformel kan faas ved at erstatte Koefficienterne ved $\left(\frac{n}{x} - \frac{n}{x+1}\right)$.

Derimod kan man ved Anvendelse af en med Riemanns's analog Fremgangsmaade naa til et Udtryk for $\psi(n)$, som har Interesse.

Vi fandt nemlig ovenfor Formlen (62)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r^2} ls(r)\,dz = 2\pi\vartheta(x)\,lx - 2\pi\psi(x),$$

dog med den Indskrænkning, at x ikke skal være en Primtalpotens. Adderes hertil

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \frac{1}{r} ls(r)\,dz = \int \frac{x^r}{r} D_r\, ls(r)\,dz - \int \frac{x^r}{r^2} ls(r)\,dz = -2\pi\vartheta(x)\,lx,$$

saa faas

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r} D_r ls(r)\, dz = 2\pi\psi(x). \tag{171}$$

Her haves altsaa et med det Riemann'ske analogt bestemt Integral, som giver Værdien af $\psi(x)$, eller rettere af $\frac{1}{2}(\psi(x+0)+\psi(x-0))$. Nu faas af det Riemann'ske Udtryk for $ls(r)$

$$ls(r) = \frac{r}{2} l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) + \Sigma l\left(1+\frac{(r-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right) + l\xi(0),$$

$$-D_r ls(r) = -\frac{1}{2} l\pi + \frac{1}{r-1} + D_r l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) - D_r\left(\Sigma l\left(1+\frac{(r-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right) + l\xi(0)\right). \tag{172}$$

Indsættes dette Udtryk i Formlen for $\psi(x)$, kan Integrationen udføres for hvert Led for sig. Da Integralet $\int \frac{x^r}{r} dz = 2\pi$, saa giver et konstant Led i Formlen for $-D_r ls(r)$ et tilsvarende Led i $\psi(x)$. Derved faas af det andet Led

$$\int \frac{x^r}{r(r-1)} dz = \int x^r \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right) dz = 2\pi(x-1)$$

som det tilsvarende Led i $2\pi\psi(x)$.

Overhovedet har man altid

$$\int \frac{x^r}{r(r-\beta)} dz = \frac{1}{\beta}\int x^r \left(\frac{1}{r-\beta} - \frac{1}{r}\right) dz = \frac{2\pi}{\beta}(x^\beta - 1). \tag{173}$$

Dette anvendes ved Behandlingen af det sidste Led. Da [1])

$$D_r l.\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right) = -C + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{r}{2}}\right), \tag{174}$$

saa faas deraf i $2\pi\psi(x)$ dels et konstant Led, dels Led af Formen

$$\int \frac{x^r}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+r}\right) dz = \int \frac{x^r}{r} \frac{r}{n(2n+r)} dz = \frac{1}{n}\int \frac{x^r}{2n+r} dz = \frac{2\pi x^{-2n}}{n}.$$

De fra Γ-Funktionen hidrørende Led blive altsaa, med Udeladelse af det konstante Led,

$$2\pi \sum_1^\infty \frac{1}{n} x^{-2n} = -2\pi l(1-x^{-2}).$$

Angaaende det sidste Led saa vi ved Behandlingen af Riemann's Formel, at

$$\Sigma_\alpha l\left(1+\left(\frac{r-\frac{1}{2}}{\alpha}\right)^2\right) + l\xi(0) = \Sigma\left[l\left(1-\frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + l\left(1-\frac{r}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right] + l\xi(\tfrac{1}{2}i),$$

hvor Konstanten $l\xi(\frac{1}{2}i)$ ifølge Genocchi er $-l2$. Da nu

$$D_r l\left(1-\frac{r}{\beta}\right) = \frac{1}{r-\beta},$$

---

[1]) Hermite: Cours professé pendant le 2e semestre 1881—82, rédigé par M. Andoyer. Second tir. p. 93.

saa give Integralerne af to til samme α svarende Led i ovenstaaende Sum følgende Resultat

$$\int \frac{x^r}{r} D_r \left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) dz = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}+\alpha i}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i} - 1) + \frac{2\pi}{\frac{1}{2}-\alpha i}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i} - 1)$$

$$= \frac{2\pi x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}+\alpha^2}\left(x^{\alpha i}(\tfrac{1}{2} - \alpha i) + x^{-\alpha i}(\tfrac{1}{2} + \alpha i)\right) - \frac{2\pi}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = 2\pi x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos \alpha l x + 2\alpha \sin \alpha l x}{\frac{1}{4}+\alpha^2}\right) - \frac{2\pi}{\frac{1}{4}+\alpha^2}.$$

Den herfra hidrørende Konstant kan bestemmes ved at bemærke, at

$$l\xi(t) = l\xi(0) + \Sigma l\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

hvoraf ved Differentiation

$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \Sigma \frac{-2t}{\alpha^2 - t^2} = -2t\Sigma \frac{1}{\alpha^2 - t^2}, \tag{175}$$

og altsaa for $t = \frac{1}{2}i$

$$\Sigma \frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = i\frac{\xi'(\frac{1}{2}i)}{\xi(\frac{1}{2}i)} = 2i\xi'\left(\frac{1}{2}i\right).$$

Da Riemann blandt andet for $\xi(t)$ anfører følgende Udtryk

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - (t^2 + \tfrac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos(\tfrac{1}{2} t l x)\, dx,$$

saa faas heraf

$$\xi'(t) = -2t\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t l x\right) dx - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \frac{d}{dt}\cos\left(\frac{1}{2} t l x\right) dx,$$

og altsaa findes endelig

$$i\xi'(\tfrac{1}{2}i) = \int_1^\infty \Sigma e^{-n^2\pi x} x^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Sigma e^{-n^2\pi x}(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1})\, dx, \tag{176}$$

hvoraf umiddelbart ses, at dette Integral er en positiv Størrelse, der tilmed maa være mindre end $\sum_1^\infty \int_1^\infty e^{-n^2\pi x} dx < \sum_1^\infty \frac{1}{n^2 \pi} = \frac{\pi}{6}$. Det er ikke vanskeligt ved delvis Integration at finde et nøjagtigere Udtryk for denne Konstant, men for vort Formaal er den her angivne Tilnærmelse tilstrækkelig, idet den viser, at

$$\Sigma_\alpha \frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = 2i\xi'\left(\frac{1}{2}i\right) < \frac{\pi}{3}. \tag{177}$$

Samle vi nu alle Leddene i Udtrykket for $\psi(x)$, saa faas endelig følgende Formel

$$\psi(x) = (x-1) - l(1 - x^{-2}) - 2x^{\frac{1}{2}} \Sigma_\alpha \frac{\frac{1}{2}\cos \alpha l x + \alpha \sin \alpha l x}{\frac{1}{4}+\alpha^2} + \lambda, \tag{178}$$

hvor λ betegner en Konstant, hvis nøjagtige Udtryk er

$$\lambda = 2i\xi'\left(\frac{1}{2}i\right) - \frac{1}{2} l\pi - C, \tag{179}$$

og som altsaa maa være en negativ Størrelse, hvis numeriske Værdi ligger mellem 0 og 1·2.

Den her fundne Formel for $\psi(x)$ fortjener i flere Henseender Opmærksomhed. For det første viser den, at $\psi(x)$ tilsteder en betydelig simplere Fremstilling end selve $\vartheta(x)$, og da, som vi nedenfor vise, $\vartheta(x)$ med en angivelig Tilnærmelse kan bestemmes ved $\psi(x)$, saa vil det uden Tvivl være praktisk at lægge Hovedvægten paa at finde $\psi(x)$, noget, som ogsaa de foregaaende Undersøgelser pege hen paa. Endvidere ses det let, at hvert enkelt af de under Σ-Tegnet indgaaende Led er en periodisk Funktion af lx med Perioden $\frac{2\pi}{\alpha}$. Hvert enkelt af disse Led vil altsaa taget for sig have Middelværdien 0, og Følgen deraf vil atter blive den, at naar de periodiske Led udelades, saa vil den øvrige Del af Formlen fremstille en kontinuert Funktion, som angiver den Middelværdi, hvorom Værdierne af $\psi(x)$ svinge saaledes, at Afvigelserne snart er positive, snart negative. Da Leddet $l(1-x^{-2})$ hurtig nærmer sig stærkt til 0, saa vil Middelværdien af $\psi(x)$ kunne fremstilles ved Formlen

$$\psi(x) = x - \text{Konst.} = x - k. \tag{180}$$

Fremdeles ses, at Grænserne for Afvigelsen mellem $\psi(x)$ og $x-k$ ville faas ved at bestemme Grænserne for de periodiske Led. Det ses, at disse Grænser blive afhængige af $\sqrt{x}$, men om de kunne fremstilles ved Formlen $\pm\rho\sqrt{x}$, hvor ρ er en Konstant, vil afhænge af, om Rækken under Σ-Tegnet altid har en Værdi, der er mindre end en af x uafhængig Grænse.

Den Værdi af x, som vilde gjøre et af Leddene i denne Sum til Maximum eller Minimum, skulde bestemmes ved Ligningen $\frac{1}{2}\sin\alpha lx = \alpha\cos\alpha lx$. Men naar lx bestemmes heraf og indsættes i det paagjældende Led, saa bliver, idet $\operatorname{tg}\alpha lx = 2\alpha$,

$$\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha lx + \alpha\sin\alpha lx}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = 2\cos\alpha lx = \frac{2}{\sqrt{1+4\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\alpha^2}}.$$

Hvis altsaa Rækken $\Sigma\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\alpha^2}}$ er konvergent, og dens Sum $=\rho$, saa vil Fejlen, der begaas ved at sætte $\psi(x) = x-k$, altid være numerisk mindre end $\rho\sqrt{x}$.

Men om den omtalte Række er konvergent eller ikke, kan ikke afgjøres, før man kjender Rødderne α, og selv om man kjendte dem, er der adskillige Tegn, som tyde paa, at Rækken ikke vilde konvergere.

Den periodiske Faktor $\Sigma\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha lx + \alpha\sin\alpha lx}{\frac{1}{4}+\alpha^2}$ viser en Analogi med en bekjendt Række, som fortjener at fremhæves. Ved Udvikling efter Fourier'ske Rækker findes nemlig [1]) for $-h < x < h$

$$\frac{e^x}{e^h - e^{-h}} = \frac{1}{2h} - \left[\frac{h\cos\frac{\pi x}{h} - \pi\sin\frac{\pi x}{h}}{\pi^2+h^2} - \frac{h\cos\frac{2\pi x}{h} - 2\pi\sin\frac{2\pi x}{h}}{(2\pi)^2+h^2} + \frac{h\cos\frac{3\pi x}{h} - 3\pi\sin\frac{3\pi x}{h}}{(3\pi)^2+h^2}\cdots\right].$$

[1]) Se f. Ex. Schlömilch: Compendium der höh. Anal. II, S. 147.

Sættes her $x = h - z$, faas

$$\frac{e^{h-z}}{e^h - e^{-h}} = \frac{1}{2h} + \left[\frac{h \cos \frac{\pi z}{h} + \pi \sin \frac{\pi z}{h}}{\pi^2 + h^2} + \frac{h \cos \frac{2\pi z}{h} + 2\pi \sin \frac{2\pi z}{h}}{(2\pi)^2 + h^2} \ldots \right]. \tag{181}$$

Denne Formel gjælder kun for $0 < z < 2h$, men det er let at se, hvad højre Side fremstiller, naar $z > 2h$. Da højre Side nemlig er en periodisk Funktion, hvis Periode er $2h$, saa vil man for $z = 2nh + r$, hvor $r < 2h$, paa højre Side erholde

$$\frac{e^{h-r}}{e^h - e^{-h}} = \frac{e^{h-2h\left(\frac{z}{2h} - E\frac{z}{2h}\right)}}{e^h - e^{-h}} = \frac{e^{-\left(\frac{z}{2h} - E\frac{z}{2h}\right)2h}}{1 - e^{-2h}} = \frac{e^{-z+2hE\frac{z}{2h}}}{1 - e^{-2h}}.$$

Sætter man dette Udtryk ind paa venstre Side af (181), gjælder Formlen for alle $z > 0$. Tillægger man nu specielt h og z Værdierne $h = \frac{1}{2} lp$, $z = \frac{1}{2} lx$, saa faas følgende Formel

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}lx + lpE\frac{lx}{2lp}}}{1 - p^{-1}} = \frac{1}{lp} + \Sigma \frac{\frac{1}{2} lp \cos \frac{m\pi\, lx}{lp} + m\pi \sin \frac{m\pi\, lx}{lp}}{(m\pi)^2 + \frac{1}{4}(lp)^2},$$

eller

$$\frac{p}{(p-1)\sqrt{x}}\, e^{lpE\frac{lx}{2lp}} = \frac{1}{lp} + \frac{1}{lp} \Sigma_m \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{m\pi\, lx}{lp} + \frac{m\pi}{lp} \sin \frac{m\pi\, lx}{lp}}{\left(\frac{m\pi}{lp}\right)^2 + \frac{1}{4}}. \tag{182}$$

Hvis man heri sætter $\frac{m\pi}{lp} = \beta$, saa faas

$$\Sigma_\beta \frac{\frac{1}{2}\cos\beta lx + \beta \sin \beta lx}{\frac{1}{4} + \beta^2} = \frac{p}{(p-1)\sqrt{x}}\, e^{lpE\frac{lx}{2lp}}\, lp - 1 = \frac{p^{E\frac{l\sqrt{x}}{lp}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{plp}{p-1} - 1. \tag{183}$$

Analogien af den Række, hvis Sum her er angivet, med den periodiske Faktor i Udtrykket for $\psi(x)$ er saa iøjnefaldende, at det ligger nær at formode, at denne muligvis bestaar netop af ganske lignende Led, men summerede for alle Primtal, saaledes at det almindelige Udtryk for α f. Ex. var $\frac{m\pi}{lp}$, hvor m betegner alle hele Tal, p alle Primtal. Men for at undersøge nærmere, om dette virkelig forholder sig saaledes, maatte man direkte summere Rækken $\Sigma \left(\frac{p^{E\frac{l\sqrt{x}}{lp}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{plp}{p-1} - 1 \right)$ for alle Primtal, men dette synes ikke at kunne gjøres med de Midler, vi i det foregaaende have faaet til vor Raadighed.

At der kan være en Mulighed for ad en direkte Vej ved at gaa ud fra rent numeriske Identiteter at komme til Riemann's Formel, saaledes at Betydningen af Rødderne α direkte fremgaar af Formlen, vil blive mere indlysende af den følgende Udvikling, hvor vi benytte det tidligere angivne andet Udtryk for $ls(r)$. Vi saa nemlig, at for saa vidt vi i $s(r)$

kun medtage de Led, som afhænge af Primtallene op til en vis endelig Grænse, som vi i øvrigt kunne vælge saa høj man vil, saa er (82)

$$-l\sigma(r) = klr + k_1 - \frac{r}{2}k_2 + \Sigma l\left(1 + \left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right),$$

hvor k, k_1, k_2 ere Konstanter, og m betegner alle hele Tal, p alle Primtal op til den valgte Grænse g. Vælges denne lig eller større end x, saa giver denne Tilnærmelsesformel, indsat i det Riemann'ske Integral, det samme Resultat som selve $s(r)$. Det samme ses ogsaa at være Tilfældet ved Indsættelse i Integralet for $\psi(x)$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^r}{r}D_r ls(r)\,dz.$$

Af Leddene i ovenstaaende Formel for $l\sigma(r)$ give ved Indsættelse heri, det første, andet og tredie følgende Led i $\psi(x)$

$$klx + 0 - \frac{1}{2}k_2 = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\sum_2^g lp.$$

Et af de logarithmiske Led giver i $\psi(x)$ Leddet

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{x^r}{r}D_r\left(l\left(1 + \frac{irlp}{2m\pi}\right) + l\left(1 - \frac{irlp}{2m\pi}\right)\right)dz = \frac{1}{2\pi}\int\frac{x^r}{r}\left(\frac{1}{r - \frac{2m\pi i}{lp}} + \frac{1}{r + \frac{2m\pi i}{lp}}\right)dz$$

$$= \frac{lp}{2m\pi i}\left(x^{\frac{2m\pi i}{lp}} - x^{-\frac{2m\pi i}{lp}}\right) = \frac{lp}{m\pi}\sin\frac{2m\pi lx}{lp}.$$

Altsaa faas

$$\psi(x) = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\sum^{(g)} lp + \frac{1}{\pi}\sum^{(g)} lp\frac{\sin\frac{2m\pi lx}{lp}}{m}. \tag{184}$$

Men nu er som bekjendt

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sin mz = \frac{1}{2}(\pi - z) \quad \text{for } 0 < z < 2\pi,$$

og for $z > 2\pi$ ser man paa lignende Maade som ovenfor ved Formel (181), at

$$\Sigma\frac{1}{m}\sin mz = \frac{1}{2}\left(\pi - \left(z - 2\pi E\frac{z}{2\pi}\right)\right) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}z + \pi E\frac{z}{2\pi}. \tag{185}$$

For $z = \frac{2\pi lx}{lp}$ faas følgelig

$$\Sigma_m\frac{1}{m}\sin\frac{2m\pi lx}{lp} = \frac{1}{2}\pi - \pi\frac{lx}{lp} + \pi E\frac{lx}{lp},$$

og altsaa endelig

$$\psi(x) = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\sum^{(g)} lp + \frac{1}{\pi}\sum_p^{(g)} lp\left(\frac{1}{2}\pi - \pi\frac{lx}{lp} + \pi E\frac{lx}{lp}\right)$$

$$= \theta(g)lx - \frac{1}{2}\Sigma lp + \frac{1}{2}\Sigma lp - \theta(g)lx + \sum^{(g)} lp\,E\frac{lx}{lp},$$

eller

$$\psi(x) = \sum^{(x)} lp\, E\frac{lx}{lp} = \sum^{(g)} lp\, E\frac{lx}{lp},$$

da $E\frac{lx}{lp} = 0$, naar $p > x$. Men dette Udtryk stemmer fuldstændig med, hvad der ad anden Vej er fundet tidligere.

Hvad der i denne sidste Udvikling er af Interesse er navnlig det, at det tydelig viser sig, at Formlen (184) er en ren Identitet. Alle mathematiske Formler ere jo i sidste Instans Identiteter, og en Formel kan ikke betragtes som fuldt bevist, førend det er muligt at paavise dens identiske Karakter. Noget saadant maa altsaa ogsaa kunne gjøres med Riemann's Formel for $\vartheta(x)$ eller, om man vil, ved den efter hans Methode afledte Formel (178) for $\psi(x)$. Men netop den sidste Udvikling giver et Vink om, hvorledes dette maatte kunne iværksættes, og navnlig viser den, at man ved Benyttelsen af trigonometriske Rækker har et Middel, som ret naturligt frembyder sig til at sammenknytte de to forskjelligartede Undersøgelsesrækker, som i det foregaaende have beskjæftiget os — paa den ene Side Riemann's Anvendelse af bestemte Integraler, paa den anden Side de af ufuldstændige Kvotienter afhængige numeriske Funktioner. Det bliver meget sandsynligt, at det maa kunne lade sig gjøre, saavel for $\vartheta(x)$ som for $\psi(x)$, at opstille et Udtryk ved ufuldstændige Kvotienter, som ved Omdannelse til kontinuert Form ved Hjælp af trigonometriske Rækker umiddelbart gik over til Riemann's Formel.

Dette ser ganske vist ret tiltalende ud, men indeholder alligevel et Moment, som ikke varsler godt for fremtidige Undersøgelser. Alt vil nemlig da komme an paa Konvergensen af de her optrædende Rækker. Men saadanne Rækker ere i og for sig særdeles vanskelige at operere med, og naar man som her maa være forberedt paa at træffe en dobbelt uendelig Række Led, saa bliver det mere end tvivlsomt, om man af disse Rækkers Beskaffenhed vil kunne drage nogen sikker Slutning om de Grænser, indenfor hvilke Summen ligger. Snarere kunde det ventes, at Betragtningen af selve de numeriske Relationer maatte kunne give nogen Oplysning i denne Henseende, men det vil i saa Fald sikkert blive nødvendigt at foretage meget indgaaende Undersøgelser om Divisionsrester.

Tillæg.[1]) Endnu en Ting bør her fremhæves, nemlig at i $\psi(x)$ ligesom i $\vartheta(x)$ det Led, som maa anses for det dominerende, hidrører fra Leddet $-l(r-1)$ i Formlen for $ls(r)$. Ligeledes viser det sig, at man ved i Formlerne (63)—(64) at sætte $\frac{1}{r-1}$ for $s(r)$ erholder en meget stor Tilnærmelse til det rigtige Resultat, hvilket for disse to Formlers Vedkommende let lader sig bevise. Det er tænkeligt, at en nøjere Diskussion af disse Formler og dermed analoge kunde lede til Opstilling af en Udvikling for $s(r)$, ved hvis Anvendelse det blev muligt at bedømme de andre Leds Indflydelse, i hvert Fald er dette et Punkt, som fortjener at tages i Betragtning ved fremtidige Undersøgelser.

---

[1]) Fandtes ikke i det til Bedømmelse indsendte Manuskript.

I Forbindelse hermed vil det være af Interesse at paavise, at ogsaa den af Tchebycheff i hans første Afhandling [1]) anvendte Methode, som netop hviler paa Betragtning af Funktionen $s(r)$, direkte fører til en med det foregaaende overensstemmende Bestemmelse af Lim $\psi(n)$.

Ved at gaa ud fra Formlen (14) viser Tchebycheff nemlig først, at Funktionen

$$\sum_2^\infty x^{-r} - \frac{1}{r-1} = s(r) - 1 - \frac{1}{r-1},$$

saa vel som alle dens Differentialkoefficienter, vil være endelig for $r = 1$, og derefter paa Basis heraf, at det samme vil være Tilfældet med Differentialkoefficienterne af

$$l(r-1) - \Sigma l(1-p^{-r}).$$

Saa vil altsaa ogsaa

$$D_r^m\left[\sum_2^\infty x^{-r} - \frac{1}{r-1} + D_r(l(r-1) - \Sigma l(1-p^{-r})\right],$$

som med de i det foregaaende anvendte Betegnelser kan skrives som

$$D_r^m\left[\sum_2^\infty x^{-r} + D_r\sum_2^\infty \tilde{\omega}(x)x^{-r}\right] = D_r^m\sum_2^\infty(1-\tau(x))\,x^{-r} = (-1)^m\sum_2^\infty(1-\tau(x))\,x^{-r}(lx)^m,$$

hvor m er et positivt helt Tal eller 0, vedblive at være endelig for $r = 1$. Betegner nu M den største numeriske Værdi, som denne Sum, naar $r = 1$, kan antage for nogen Værdi af m, saa vil følgelig ogsaa

$$\sum_2^\infty \frac{1-\tau(x)}{x}\left(1+\frac{lx}{1}+\frac{(lx)^2}{[2]}+\frac{(lx)^3}{[3]}+\cdots\right) < M\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{[2]}+\frac{1}{[3]}\cdots\right) = Me$$

være en endelig Størrelse.

Men denne Sum er det samme som

$$\sum_2^\infty(1-\tau(x)) = \mathrm{Lim}_{n=\infty}(n-1-\psi(n)).$$

Der vilde herved være ført et Bevis for, at den asymptotiske Værdi af $\psi(n)$ havde Formen $n - a$, hvor a er en Konstant, og dette kunde atter benyttes til Bevis for, at Integrallogarithmen gav den asymptotiske Værdi af $\vartheta(n)$. At Tchebycheff ad anden Vej finder Integrallogarithmen for selve $\theta(n)$, beror alene paa den Omstændighed, at han i Stedet for $-\Sigma l(1-p^{-r})$ kun benytter Σp^{-r}, saa der ret beset ikke viser sig nogen Uoverensstemmelse mellem hans Resultat og det, hvortil de andre Methoder føre.

Skjønt det saaledes kunde synes, at man ad denne Vej naar til en direkte Bestemmelse af den asymptotiske Værdi af $\psi(n)$, have vi dog ikke benyttet den, fordi den Sætning, hvorpaa Beviset bygges, hviler paa den Forudsætning, at Formlen

$$ls(r) = -\Sigma l(1-p^{-r})$$

ogsaa vedbliver at være gyldig for $r = 1$, da de paagjældende Rækker ere divergente,

---

[1]) Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Liouville's Journal Bd. 17.

hvilken ikke uden videre kan betragtes som tilladelig. Det synes imidlertid at være muligt at gjennemføre Beviset ved at tillægge r en større Værdi end 1, men dette Punkt fordrer dog en nærmere Undersøgelse, paa hvilken vi ikke her skulle indlade os.

§ 8. Tilnærmelsesformler for $\vartheta(n)$ og $\theta(n)$.

Det vil af de ovenstaaende Betragtninger fremgaa, at Middelværdien af Funktionen $\tau(x)$ tilnærmelsesvis kan sættes lig 1 eller, om man vil, lig $1-\frac{k}{x}$, hvor k er en Konstant, som er lidt mindre end $\frac{1}{4}$. Indsat i Formlen $\sum\limits_2^n E\frac{n}{x}\tau(x)$ giver den $T(n)\pm\rho\sqrt{n}$, hvor ρ er en konstant Størrelse. Derimod have vi ikke været i Stand til at faa tilstrækkelig snævre Grænser for den Fejl, som begaas ved at indsætte det samme Udtryk i Formlen for $\psi(n)$. Derved faas ganske vist for $\psi(n)$ et Udtryk, der kan erstattes ved $(n-1)-kln+$ Konst., men for den virkelige Værdi af $\psi(n)$ have vi kun sikkert de af Tchebycheff angivne Grænser, hvorefter man kan sætte $\psi(n)=n-1\pm\lambda.n$, hvor λ er en ægte Brøk. Vel er det meget sandsynligt, at man i Stedet for λn maatte kunne sætte et Udtryk, hvis væsentligste Led var af Formen $\pm\lambda\sqrt{n}$, men ganske sikkert er det dog ikke.

Da $\vartheta(n)=\sum\limits_2^n\frac{1}{lx}\tau(x)$, saa faas, ved ogsaa her for $\tau(x)$ at sætte $1-\frac{k}{x}$, for $\vartheta(n)$ et Udtryk af Formen

$$\vartheta(n)=\sum_2^n\frac{1}{lx}-k\sum_2^n\frac{1}{xlx}+R(n). \tag{186}$$

Fejlen $R(n)$ vil her let kunne vises at være af samme Orden som Fejlen i det tilnærmede Udtryk for $\psi(n)$. Sættes nemlig $\tau(x)=t(x)+f(x)$, hvor $t(x)=1-\frac{k}{x}$, og $f(x)$ altsaa betegner den Fejl, der begaas ved at sætte $t(x)$ for $\tau(x)$, saa er $\sum\limits_2^n f(x)=F(n)=$ Fejlen i $\psi(n)$. Nu er altsaa

$$R(n)=\sum_2^n\frac{f(x)}{lx}.$$

Summeres her delvis ved Formlen[1] $\Sigma uv=u\Sigma v-\Sigma(\Delta u\Sigma v_1)$, idet $u=\frac{1}{lx}$, $v=f(x)$, $\Sigma v=F(x)$ og $\Sigma v_1=F(x+1)-F(2)$, saa faas

---

[1] Ramus: Differential- og Integralregning S. 352.

$$R(n) = \frac{1}{ln} F(n) + \sum_2^n (F(x+1) - F(2)) \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{lx \,.\, l(x+1)} \,. \tag{187}$$

I det sidste Led er Faktoren $F(x+1) - F(2)$ af samme Orden som $F(x)$, $l\left(1+\frac{1}{x}\right)$ er af Ordenen $\frac{1}{x}$, og hele Summen kan derfor ikke blive uendelig af højere Orden end $F(n)$, saaledes at Fejlen $R(n)$ i det højeste bliver af samme Orden som $F(n)$. Hvis altsaa Fejlen i $\psi(n)$ afhænger af $\sqrt{n}$, saa vil det samme blive Tilfældet med Fejlen i $\vartheta(n)$. At gjennemføre Beregningen nærmere for de af Tchebycheff angivne Grænser vil ikke lønne sig, da der ikke kommer noget bedre Resultat ud deraf, end hvad man ad anden Vej kan finde, nemlig Grænser, hvis dominerende Led er af Formen $\pm \lambda n$.

Den Formel, vi saaledes have erholdt for $\vartheta(n)$, er, som det strax ses, væsentlig den samme som Integrallogarithmen, idet $\sum_2^n \frac{1}{lx}$ paa det nærmeste vil kunne erstattes ved $\int_{2-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{lx} dx$, medens det andet Led, der tilnærmelsesvis kan erstattes ved lln, ikke vil have stor Betydning i Sammenligning med det første. Da tilmed Integrallogarithmen $Li(x)$ bliver 0 for en Værdi af x, der er lidt mindre end 1·5, saa kan man altsaa, idet det andet Led helt kastes over paa Restleddet tilligemed Afvigelsen mellem $Li(n)$ og $\sum_2^n \frac{1}{lx}$, skrive

$$\vartheta(n) = Li(n) + R'(n) \,,$$

hvor Restleddet ikke bliver af højere Orden end i den oprindelige Formel.

Medens vi for den absolute Værdi af Restleddet kun have faaet Grænser af Formen $\pm \lambda n$, hvor λ er en Konstant, saa faar man ved en Beregning af M i d d e l a f v i g e l s e n mellem $\vartheta(n)$ og $Li(n)$ en noget bedre Forestilling om dette Restled.

Det er nemlig let tilnærmelsesvis at beregne Kvadratsummen af Afvigelserne $\tau(x) - 1$ for alle x fra 2 til n. Betegnes denne Kvadratsum ved S, saa haves

$$S = \sum_2^n (\tau(x) - 1)^2 = \sum_2^n \tau(x)^2 - 2 \sum_2^n \tau(x) + n - 1 \,.$$

Men nu er

$$\sum_2^n \tau(x)^2 = \sum_2^n E \frac{ln}{lp} \cdot (lp)^2 < ln \cdot \sum_2^n lp < \psi(n) ln \,,$$

saa at altsaa erholdes

$$S < \psi(n) ln - 2\psi(n) + n - 1 = \psi(n)(ln - 2) + n - 1 \,. \tag{188}$$

Indføres heri de Tchebycheff'ske Grænser for $\psi(n)$, faas et Udtryk, hvor det dominerende Led bliver af Formen $(\alpha ln - \beta) n$, hvor Konstanterne α og β omtrent ere henholdsvis 1·11 og 1·2. Sættes for Simpelheds Skyld $\alpha = \beta = 1{\cdot}2$, saa findes som tilnærmet Udtryk for M i d d e l a f v i g e l s e n mellem $\tau(x)$ og 1 for alle $\tau(x)$ fra $x = 2$ til $x = n$

$$m = \sqrt{1{\cdot}2\,(ln - 1)} \,.$$

For $\frac{\tau(x)}{lx}$ faas altsaa Kvadratet af Middelafvigelsen fra $\frac{1}{lx}$ at være

$$1{\cdot}2\left(\frac{1}{lx}-\frac{1}{(lx)^2}\right),$$

som skal summeres for alle x fra 2 til n, hvorved faas Kvadratet af den tilsvarende Middelfejl paa $\vartheta(n)-Li(n)$. Vi kunne her med tilstrækkelig Tilnærmelse integrere i Stedet for at summere. Det første Led indenfor Parenthesen giver da Integralet $Li(x)$, det andet findes saaledes

$$\int\frac{1}{(lx)^2}dx=\int\frac{x}{(lx)^2}dlx=\int\frac{e^z}{z^2}dz=-\frac{e^z}{z}+\int\frac{e^z}{z}dz=-\frac{x}{lx}+Li(x).$$

Derefter faas altsaa endelig for den søgte Middelafvigelses Kvadrat

$$M^2=1{\cdot}2\frac{n}{ln},$$

idet Indflydelsen af den lavere Integrationsgrænse kan lades ude af Betragtning. For selve M findes derefter

$$M=\sqrt{1{\cdot}2\frac{n}{ln}}, \tag{189}$$

saaledes at altsaa Middelafvigelsen mellem $\vartheta(n)$ og $Li(n)$ herefter for store n bliver af lavere Orden end $\sqrt{n}$.

Vi saa lejlighedsvis tidligere (167), at $\theta(n)ln>\psi(n)>0{\cdot}9n$, følgelig er ogsaa $\frac{n}{ln}<\frac{\theta(n)}{0{\cdot}9}$. Indføres dette i Udtrykket for Middelafvigelsen, faas

$$M_n<\sqrt{\frac{4}{3}\theta(n)},$$

saa at altsaa Middelafvigelsen kan antages at voxe mindre stærkt end en Størrelse, der er proportional med Kvadratroden af Primtalmængden.

Et lignende Resultat kan ogsaa udledes ved direkte at danne Summen

$$M^2=\Sigma\left(\frac{\tau(x)-1}{lx}\right)^2=\Sigma\frac{\tau^2(x)}{(lx)^2}-2\Sigma\frac{\tau(x)}{(lx)^2}+\Sigma\frac{1}{(lx)^2}.$$

Da $\frac{\tau(x)}{lx}=\tilde{\omega}(x)=\frac{1}{m}$ for $x=p^m$, saa faas

$$\Sigma\frac{\tau^2(x)}{(lx)^2}=\Sigma(\tilde{\omega}(x))^2=\theta(n)+\frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{9}\theta(n^{\frac{1}{3}})+\ldots$$

$$\Sigma\frac{\tau(x)}{(lx)^2}=\Sigma\frac{\tilde{\omega}(x)}{lx}=\Sigma\frac{1}{lp}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{l.p^2}+\frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{l.p^3}\ldots=\sum_2^n\frac{1}{lp}+\frac{1}{4}\sum_2^{\sqrt{n}}\frac{1}{lp}+\frac{1}{9}\sum_2^{\sqrt[3]{n}}\frac{1}{lp}+\ldots$$

Da endvidere $\Sigma\frac{ln}{lp}=ln\Sigma\frac{1}{lp}>\text{Þ}(n)=\theta(n)+\theta(n^{\frac{1}{2}})+\theta(n^{\frac{1}{3}})+\ldots$, saa faas

$$M^2<\theta(n)+\frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{2}})+\ldots-\frac{2}{ln}\left(\text{Þ}(n)+\frac{1}{4}\text{Þ}(n^{\frac{1}{2}})+\ldots\right)+\Sigma\frac{1}{(lx)^2}$$

eller, da $\theta(n)+\frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{2}})+\ldots<\vartheta(n)<\text{Þ}(n)+\frac{1}{4}\text{Þ}(n^{\frac{1}{2}})+\ldots$,

$$M_n^2 < \vartheta(n) - \frac{2}{ln}\vartheta(n) + Li(n) - \frac{n}{ln} = \vartheta(n)\left(1 - \frac{2}{ln}\right) + Li(n) - \frac{n}{ln}, \tag{190}$$

som nærmer sig stærkt til $\vartheta(n)$, naar n voxer.

De i det foregaaende beregnede Kvadratsummer give ganske vist strengt taget kun en Forestilling om Middelfejlen paa $\frac{1}{lx}$, betragtet som Fremstilling af $\tilde{\omega}(x)$, men da i Kvadratsummen M_n indgaa Kvadraterne paa alle de enkelte mulige Afvigelser $\tilde{\omega}(x) - \frac{1}{lx}$, saa giver den tillige nogen Oplysning om Afvigelsen mellem $\vartheta(n)$ og $Li(n)$, og navnlig maa denne ventes at ville blive betydelig mindre end M_n. Den virkellge «Middelfejl» paa $Li(n)$, opfattet som Fremstilling af $\vartheta(n)$, skulde bestemmes ved først at søge Kvadratsummen

$$\Sigma(\vartheta(n) - Li(n))^2,$$

men for denne Sum er det ikke muligt a priori at angive noget Udtryk.

Fra $\vartheta(n)$ er det let at gjøre Overgangen til $\theta(n)$. Thi da

$$\vartheta(n) = \theta(n) + \frac{1}{2}\theta(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(n^{\frac{1}{3}}) + \ldots,$$

saa er $\vartheta(n) - \vartheta(n^{\frac{1}{2}}) = \theta(n) - \frac{1}{2}\theta(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(n^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{4}}) \ldots < \theta(n)$,

saa at man faar

$$\vartheta(n) > \theta(n) > \vartheta(n) - \vartheta(n^{\frac{1}{2}}). \tag{191}$$

Hvis Restleddet i Formlen $\vartheta(n) = Li(n) + R(n)$ var bekjendt, saa vilde man ved Indsættelse i Formlen

$$\theta(n) = \Sigma\frac{\mu(x)}{x}\left(Li(n^{\frac{1}{x}}) + R(n^{\frac{1}{x}})\right) = P(n) + 1 + \Sigma\frac{\mu(x)}{x}R(n^{\frac{1}{x}})$$

kunne erholde Grænser for Restleddet i Formlen $\theta(n) = P(n) + 1 + R'(n)$ ved for $\mu(x)$ overalt at sætte $+1$. Man vilde derved finde, at Restleddet $R'(n)$ vilde blive af samme Orden som $R(n)$.

Hvorledes end den analytiske Form for Restleddets Grænser er beskaffen, saa er det ialfald for den første Del af Talrækken sikkert, at dets numeriske Værdi er meget ringe. G l a i s h e r har i Indledningen til «Factor Table for the sixth Million» for Intervaller paa 50000 fra 0 til 9 Millioner sammenlignet $\theta(n)$ med Riemann's Formel saa vel som med de andre Tilnærmelsesformler, som ere opstillede. Han finder, at den gjennemsnitlige Afvigelse for hin vilde være -9, en Differens, som tilmed reduceres med en Enhed, da Glaisher regner Tallet 1 med blandt Primtallene og altsaa i Virkeligheden betragter Differensen

$$P(n) + 1 - (\theta(n) + 1) = P(n) - \theta(n),$$

som er en Enhed mindre end $P(n) + 1 - \theta(n)$. Betragter man Afvigelserne nærmere, saa ses, at de s n a r t e r e p o s i t i v e , s n a r t n e g a t i v e , saa at der ikke kan være Tvivl om, at det netop er denne Formel og ingen anden, som skal benyttes, for saa vidt man ikke vil benytte en Formel, som tilsteder Vendepunkter. Det vil endvidere ses, at selve A f v i g e l s e r n e s n u m e r i s k e V æ r d i s t i g e r l a n g s o m t m e d n, men om de stige i Forhold til

$\sqrt{n}$ lader sig ikke afgjøre af de Sammenstillinger, Glaisher har foretaget. De numerisk største Afvigelser, Glaisher har i sin Tabel, ere nemlig (naar vi kun medtage de Differenser, som ere større end alle de foregaaende) følgende:

For 0·30	Million	... + 26	for 2·85	Million	... — 45	for 8·70	Million	... — 95
- 1·00	—	... + 29	- 3·45	—	... — 74	- 8·75	—	... —106
- 1·20	—	... — 41	- 7·05	—	... — 87	- 8·80	—	... —139.

Disse Tal kunne nok tyde paa en Stigning proportional med $\sqrt{n}$, men dels kan man ikke gaa ud fra, at de virkelig angive de største Afvigelser, som findes, dels maatte man ogsaa særlig undersøge Forholdet for de laveste Tals Vedkommende, og om dette giver Glaisher ikke nogen Oplysning.

Glaisher har for at anskueliggjøre, hvorledes Afvigelserne variere, fremstillet dem grafisk i et Diagram, der er vedføjet den nævnte Afhandling. Der er noget i dette, som kunde tyde paa en Periode afhængig af ln, saaledes at Periodetallet, naar $\log_{10} n$ toges til Argument, omtrent kunde blive 0·17 (for ln altsaa 0·39). For at se, om dette muligvis skulde bekræfte sig for lavere Tal, have vi for Argumenter ln sammenlignet $\theta(n)$ med $P(n)$ for Tallene op til e^{15}, idet Primtalmængderne ere bestemte ved Optælling dels i de af Felkel i Lambert's «Supplementa» og af Vega i 2den Udgave (1797) af hans Logarithmetavler meddelte Primtallister, efter at de i disse Tavler indeholdte Fejl vare rettede efter Professor Oppermann's Angivelse, dels i de større Faktortavler. Da Gauss[1]) har angivet en Fortegnelse over Primtalmængden i hvert Tusinde af den første Million, og de i denne indeholdte Fejl ere rettede af Meissel, samt selve Tavlen af Glaisher fortsat op til 9 Millioner, var det let ved Sammentælling af disse Tal at danne en Tabel over Primtalmængden op til $1000N$ for $N < 9000$ (jvfr. Tab. IV), og naar en saadan Fortegnelse toges til Hjælp, var det kun et ringe Arbejde at foretage de yderligere Optællinger, som vare nødvendige. Resultatet af den nævnte Sammenligning er angivet i Tabel VI, men det vil ses, at skjønt Intervallet er tilstrækkelig lille til, at den omtalte Periodicitet kunde træde frem, er der dog intet, som tyder paa dens Tilstedeværelse, saa at den i Glaisher's Diagram tilsyneladende regelmæssige Fordeling af de store Maxima og Minima vistnok skyldes en Tilfældighed.

Det bør naturligvis ogsaa erindres, at selve Faktortavlerne ikke kunne anses for fuldt korrekte. Der er f. Ex. i de hos Glaisher og i de her anførte Optællinger ikke taget Hensyn til den af Oppermann paapegede Fejl hos Burckhardt, at 1330001 er et Primtal.

Om de andre Formler, som af forskjellige Forfattere ere bragte i Anvendelse til Fremstilling af $\theta(n)$, kunne vi fatte os i Korthed. Naar Gauss, Tchebycheff og Hargreave benytte selve $Li(n)$ i Stedet for $P(n)+1$, saa maa dette efter det foregaaende utvivlsomt kun betragtes som en første Tilnærmelse, idet man derved begaar en systematisk

---

[1]) Gauss' Werke Bd. II

Fejl af samme Orden som $\theta(n^{\frac{1}{2}})$. Glaisher's Sammenstilling af disse Formler med de optalte Primtalmængder viser ogsaa tydelig, at Fejlen er stadig voxende. Mærkeligere er det vistnok, at Legendre's[1]) Formel

$$\theta(n) = \frac{n}{ln - 1{\cdot}08366} \tag{192}$$

giver saa gode Resultater, som den i Virkeligheden gjør. Man kan naturligvis opfatte dette som begrundet i, at denne Formel giver en god Tilnærmelse til $Li(n)$, men denne Forklaring er ikke ganske tilfredsstillende. At Formlen giver en god Tilnærmelse, siger med Hensyn til Primtallenes Fordeling noget mere. Vi saa nemlig før, at man exakt maa have

$$\psi(n) = \Sigma lp E\frac{ln}{lp}.$$

Heraf følger atter, at

$$\psi(n) = \theta(n)\, ln - \Sigma lp\left(\frac{ln}{lp} - E\frac{ln}{lp}\right),$$

hvor den under Σ-Tegnet staaende Parenthes altid maa være < 1. Hele den paa højre Side staaende Sum Σ maa altsaa være $< \Sigma lp$, altsaa ogsaa $< \psi(n)$ eller lig $\lambda . \psi(n)$, hvor λ er en ægte Brøk. Heraf vilde der faas et Udtryk for $\theta(n)$ af Formen

$$\theta(n) = \frac{\psi(n)(1+\lambda_n)}{ln} = \frac{n(1+\lambda_n')}{ln}, \tag{193}$$

naar $\psi(n)$ erstattes ved $n - k$, hvor k er en Konstant. Det maa altsaa, naar λ_n ikke betragtes som en Konstant, men som en Funktion af n, være muligt at udtrykke $\theta(n)$ under denne Form, og det var maaske nok Umagen værd at forsøge at finde en saadan Tilnærmelsesformel.

Men naar Legendre's Formel skal gjælde, altsaa

$$\theta(n) = \frac{n}{ln - B}$$

eller $\theta(n) . ln - B\,\theta(n) = n$, saa vil, naar $\psi(n)$ erstattes ved $n - k$, haves, at

$$\theta(n)\, ln - B\,\theta(n) - k = \theta(n)\, ln - \Sigma lp\left(\frac{ln}{lp} - E\frac{ln}{lp}\right),$$

eller at

$$B\,\theta(n) + k = \Sigma lp\left(\frac{ln}{lp} - E\frac{ln}{lp}\right),$$

saa at den paa højre Side indgaaende Sum væsentlig skulde voxe proportionalt med $\theta(n)$.

Nu gjælder ganske vist Legendre's Formel ikke, naar B er en Konstant, men for saa vidt denne Størrelse skal opfattes som variabel, varierer den i hvert Fald meget langsomt, og selve Legendre's Formel giver altsaa ogsaa et af disse mange Vidnesbyrd om de højst mærkværdige Relationer, som Læren om Primtallene giver Anledning til.

[1]) Théorie des nombres IV, § 8.

§ 9. Intervallet mellem to paa hinanden følgende Primtal.

Tchebycheff har anvendt de af ham fundne Grænser for $\psi(n)$ til deraf at udlede Grænser for Intervallet mellem to Primtal. Da en laveste Grænse for Intervallet (for $p > 3$) altid er 2, bliver det væsentlig den højere Grænse, hvorom der kan være Tale. En saadan Grænse vil i Virkeligheden let kunne bestemmes, saafremt man for en eller anden i øvrigt vilkaarlig Funktion af n, $F(n)$, som kun varierer, naar n passerer et Primtal, har angivet absolute Grænser. Antages nemlig, at disse Grænser ere udtrykte som Funktioner af n ved $A(n)$ og $B(n)$, saa at altsaa

$$A(n) < F(n) < B(n) \tag{194}$$

for alle n (eller i det mindste for alle n større end et givet Tal), og antages, at p er et Primtal og $p + a + 1$ det næste, saa at altsaa intet af de a Tal, som følge efter p, er et Primtal, saa vil man have $F(a+p) = F(p)$. Da nu haves

$$A(p) < F(p) < B(p)$$

samt

$$A(p+a) < F(p) < B(p+a),$$

saa er altsaa ogsaa

$$A(p) < B(p+a) \quad \text{og} \quad A(p+a) < B(p).$$

For saa vidt nu $F(p)$ er en stedse voxende eller stedse aftagende Funktion, maa det samme være Tilfældet med $A(p)$ og $B(p)$, og Grænser for Intervallet mellem to Primtal ville derfor kunne bestemmes ved Opløsning af Ligningerne

$$A(p) = B(p+a) \quad \text{eller} \quad A(p+a) = B(p), \tag{195}$$

som ville give en højere Grænse for Tallet a. Sætter man n for p, hvor n er et vilkaarligt Tal, faar man Grænser for Afstandene fra n til de to nærmeste Primtal. Et ganske tilsvarende Ræsonnement kan anvendes, hvis p ikke betegner Primtallene, men en anden Række mærkelige Tal, og $F(n)$ er en Funktion, som kun varierer, naar et af disse passeres.

Som Exempel kunne vi benytte Tchebycheff's Grænser for $\psi(n)$ til deraf at bestemme Grænser for Intervallet mellem to Primtalpotenser, eftersom $\psi(n)$ kun forandres, naar n passerer en saadan. Grænserne for $\psi(n)$ kunne, naar Faktorerne til n gjøres lidt større end de af Tchebycheff angivne, altid erstattes ved Udtryk af Formen λn, hvor λ betegner en Konstant, saa at man kan sætte

$$An < \psi(n) < Bn,$$

hvor A og B betegne konstante Tal. Dette fører til følgende Ligning til Bestemmelse af Intervallet mellem n og den næste Primtalpotens

$$A(n+a) = Bn,$$

og deraf $$a = \frac{B-A}{A} \cdot n = \left(\frac{B}{A} - 1\right) n. \tag{196}$$

Man ser, at Grænsen bliver af Ordenen n.

For selve Summen af Primtallenes Logarithmer $\sum\limits_{2}^{n} lp$, som kan findes udtrykt ved Hjælp af $\psi(n)$, har Tchebycheff angivet Grænserne

$$An - \frac{12}{5} A\sqrt{n} - \frac{5}{8l6}(ln)^2 - \frac{15}{4} ln - 3 < \sum_{2}^{n} lp < \frac{6}{5} An - A\sqrt{n} + \frac{5}{4l6}(ln)^2 + \frac{5}{2} ln + 2, \tag{197}$$

hvor A betegner en Konstant, nemlig

$$A = l \frac{2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{3}} . 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0{\cdot}9213\ldots$$

Naar n er tilstrækkelig stor, kunne disse Grænser atter erstattes ved de videre

$$An - \frac{5}{2}\sqrt{n} < \sum_{2}^{n} lp < \frac{6}{5} An.$$

Bestemmes heraf a ved Ligningen

$$A(n+a) - \frac{5}{2}\sqrt{n+a} = \frac{6}{5} An,$$

findes

$$a = \frac{1}{5} n + \frac{25}{8A^2} + \frac{5}{2A}\sqrt{\frac{25}{16A^2} + \frac{6}{5} n},$$

eller, naar n er tilstrækkelig stor,

$$a < \frac{1}{5} n + 3\sqrt{n}. \tag{198}$$

Denne Grænse stemmer ganske godt med Tchebycheff's Resultat, idet han — ad en anden meget besværligere Vej — viser, at der er mindst et Primtal mellem λ og L, naar

$$\lambda = \frac{5}{6} L - 2\sqrt{L} - \frac{25(lL)^2}{16A\,l6} - \frac{125\,lL}{24A} - \frac{25}{2A}.$$

Men denne Grænse for Intervallet er sikkert meget videre, end den er i Virkeligheden, saaledes som det idetmindste for $n < 9.10^6$ fremgaar af Faktortavlerne. Selv om man for en Funktion af Primtal fandt Grænser af Formen

$$A.\sqrt[m]{n} < F(n) < B.\sqrt[m]{n}, \qquad A < B,$$

saa vilde disse endnu ikke føre til snævrere Grænser, end at a blev lig $\frac{B^m}{A^m} n$.

Havde man derimod fundet, at almindelig, idet k og λ ere Konstanter,

$$n + \lambda - k\sqrt{n} < \psi(n) < n + \lambda + k\sqrt{n}, \tag{199}$$

saa blev Intervallet bestemt ved Ligningen

$$n + a + \lambda - k\sqrt{n+a} = n + \lambda + k\sqrt{n}\,, \tag{200}$$

der ved Omskrivning til $a = k(\sqrt{n} + \sqrt{n+a})$ strax viser, at Grænsen væsentlig blev af Ordenen $\sqrt{n}$, og at der mellem n^2 og $n^2 - 2kn$ maatte være mindst en Primtalpotens. Hvis den af Professor Oppermann[1] angivne Erfaringssætning, at der mellem n^2 og $n(n \pm 1)$ altid er mindst et Primtal, er rigtig, saa maatte der altsaa ogsaa mindst være en Primtalpotens. Dette vilde kun kunne opnaas ved at antage $k < \frac{1}{2}$, for saa vidt som Grænserne skulde være saa snævre som muligt.

Der vil efter det tidligere udviklede være god Grund til at antage, at $\psi(n)$ virkelig er indesluttet mellem Grænser af den angivne Form, og da Oppermann's Sætning er rigtig for $n^2 < 9 . 10^6$, saa tyder dette paa, at k virkelig maatte være $< \frac{1}{2}$. Her maa imidlertid erindres, at Oppermann's Sætning forudsætter, at n er et helt Tal, og at den for smaa Værdier af n ikke gjælder undtagen under denne Forudsætning. Navnlig mærkes Intervallet 14 mellem 113 og 127, men i dette Interval ligger der ogsaa 2 Primtalpotenser, 121 og 125, saa at Intervallet mellem Primtalpotenserne dog holder sig indenfor den ovenfor angivne Grænse. Det samme er Tilfældet for Intervallet mellem 7 og 11 samt 23 og 29. De følgende Primtalintervaller holde sig stedse under den ved Kvadratroden af Tallet bestemte Grænse, og i det forholdsvis store Interval mellem 1327 og 1361 ligger der endog en Primtalpotens $1331 = 11^3$. Det næste Interval, som frembyder den største Interesse, er 31397 til 31469, paa 72, men derefter stiger Intervallets Grænse kun ganske langsomt, saaledes at vi først ved 370261 træffe et Interval paa 112.

For muligen at komme til Klarhed over, hvorledes Intervallet i Virkeligheden varierer, sammenstilledes først det sidstnævnte Interval tillige med de af Glaisher anførte største Intervaller (over 130) i de første 9 Millioner i en Tavle og sammenlignedes dels med $\sqrt{n}$, dels med ln og $(ln)^2$, saaledes som vist i nedenstaaende Tavles sidste Del. Det vil af denne ses, at Intervallet stiger meget langsommere end $\sqrt{n}$, derimod synes det snarere at stige som ln eller maaske som $(ln)^2$. Da der i de anførte Intervaller ikke falder nogen Primtalpotens, faa saadanne ingen Indflydelse.

Mere Oplysning giver en lignende Sammenstilling for de lavere Primtalpotensers Vedkommende, og vi anføre derfor i Tavlens første Del en Oversigt over de mærkeligste af de i den første Del af Talrækken forekommende Intervaller mellem Primtalpotenser.

[1] Oversigt over det Kgl. Danske Vidensk. Selskabs Forh. 1882.

n	Interval	$\sqrt{n}$	ln	$(ln)^2$	n	Interval	$\sqrt{n}$	ln	$(ln)^2$
2	1	1·4	0·69	0·5	370261	112	608	12·8	164·4
5	2	2·2	1·61	2·6	1357201	132	1165	14·1	199·4
13	3	3·6	2·56	6·6	1561919	132	1250	14·3	203·4
19	4	4·4	2·94	8·7	2010733	148	1418	14·5	210·7
32	5	5·7	3·47	12·0	3826019	138	1956	15·2	229·8
53	6	7·3	3·97	15·8	3933599	132	1983	15·2	230·6
89	8	9·4	4·49	20·1	4652353	154	2157	15·4	235·7
139	10	11·8	4·93	24·3	5888741	132	2427	15·6	243·0
199	12	14·1	5·29	28·0	6034247	146	2456	15·6	243·8
293	14	17·1	5·68	32·3	6371401	136	2524	15·7	245·5
887	20	29·8	6·79	46·1	6958667	134	2638	15·8	248·2
1129	22	33·6	7·03	49·4	7230331	148	2689	15·8	249·4
1331	30	36·5	7·19	51·7	7621259	140	2761	15·8	251·1
5591	32	74·8	8·63	74·5	7743233	138	2783	15·9	251·6
8467	34	92·0	9·04	81·8	8001359	132	2829	15·9	252·6
9551	36	97·7	9·16	84·0	8421251	152	2902	15·9	254·3
15683	44	125·2	9·66	93·3	8917523	140	2986	16·0	256·1
19609	52	140·0	9·88	97·7					
31397	72	177·2	10·35	107·2					

Intervallets Grænse viser sig her omtrent proportional med $(ln)^2$, men voxer dog forholdsvis lidt stærkere. Rimeligvis forholder Sagen sig i Virkeligheden saaledes, at denne Grænse maa kunne udtrykkes ved en stærkt konvergerende Række af Formen

$$a = \alpha + \beta ln + \gamma (ln)^2 + \delta (ln)^3 + \ldots,$$

hvor Koefficienterne ere saaledes beskafne, at det tredie Led $\gamma (ln)^2$ er det dominerende Led for saa godt som alle de Værdier af n, som angives ved Faktortavlernes Udstrækning.

Man kunde være tilbøjelig til at formode, at de af Mertens bestemte Grænser for $\Sigma \frac{1}{p}$ maatte egne sig til Afledning af Grænser for Intervallet, men dette er ikke Tilfældet; dertil ere de meget for vide, og dette har atter sin Grund i, at de ere udledte ved Hjælp af Grænser for $\psi(n)$, som ere endnu mere vage end de af Tchebycheff angivne.

§ 10. Forklaring af Tabellerne.

Da alle Undersøgelser om Primtallenes Antal blandt andet ogsaa maa stiles mod det Formaal, at tilvejebringe Midler til at kontrollere Faktortavlernes Rigtighed, er det af Vigtighed at have Midler til at kunne jevnføre Formlernes Resultater med de virkelig optalte Primtalmængder. En saadan Sammenligning har nu kunnet iværksættes med betydelig større Udbytte end tidligere, efter at Glaisher med saa megen Udholdenhed har naaet at udfylde det Hul i Faktortavlerne, som tidligere fandtes, og Resultaterne af hans Primtaloptællinger nu foreligge fuldstændig i den i indeværende Aar (1883) udkomne Faktortavle for den 6te Million. Glaisher har tillige, som ovenfor omtalt, i Indledningen til denne foretaget udførlige Sammenligninger mellem $\theta(x)$ og de forskjellige Formler, der ere anvendte som Tilnærmelsesformler for denne Funktion. Vi kunne derfor i Hovedsagen nøjes med at henvise til denne Forfatter angaaende dette Punkt. For at blive i Stand til at kunne udføre en saadan Sammenligning havde jeg allerede i Efteraaret 1882 beregnet en Tavle over de dertil nødvendige Fundamentalværdier af Integrallogarithmen og ligeledes paabegyndt Beregningen af en Tabel over Funktionen $P(x)$. Da slige Tavler ingenlunde ere blevne overflødiggjorte ved Glaisher's Arbejde, men dette tvertimod har gjort Tilvejebringelsen af saadanne mere ønskelig, eftersom den Maade, hvorpaa Glaisher har udført Beregningen, er meget besværlig, saa meddele vi nedenfor disse Tavler. Tillige var der en Del andre Tabeller, hvis Betydning for de foreliggende Undersøgelser er iøjnefaldende, og det forekom mig derfor det rigtigste at samle disse og lade dem medfølge dette Arbejde, som de derved fuldstændiggjøre. Tillige give de et Middel til at kontrollere og bedømme Rigtigheden af de angivne Udviklinger, og det har derfor sin store Betydning at have dem let tilgængelige. — Med Hensyn til deres Omfang bemærkes, at de her paa nogle Punkter fremtræde i en lidt fyldigere Skikkelse end den, hvori de fandtes i det oprindelige Manuskript.

Tab. I. Tabel over Værdierne af reciproke Potenssummer og deres Logarithmer.

Denne Tavle indeholder i 1ste Spalte med 16 Decimaler Værdierne af $s(r)$ for $r = 2, 3 \ldots 35$. Disse Værdier ere oprindelig beregnede af Legendre, de ere aftrykte af De Morgan i hans Diff. and Integr. Calc. p. 554. Her ere de anførte efter Merrifield[1]. Da den Prøve, som faas ved Addition, idet $\sum_1^\infty (s(r) - 1) = 1$, stemmer, tør det forudsættes, at Værdierne ere korrekt angivne.

I 2den Spalte findes de naturlige Logarithmer af disse Tal efter Merrifield's Beregning; efter samme Forfatter ere ogsaa Tallene i 4de Spalte, reciproke Potenssummer af Primtallene alene, angivne; de ere beregnede af dem i 2den Spalte ved Anvendelse af Formlen (34).

Tallene i 3die Spalte, de Briggiske Logarithmer af $s(r)$, ere efter egen Beregning. De ere Resultatet af en dobbelt Beregning efter forskjellige Methoder og prøvede ved Sammenligning med de af Merrifield angivne naturlige Logarithmer.

---

[1]) Proceedings of the Royal Society of London. Vol. XXXIII. 7/11 1881.

Tab. II. Værdier af e^x og $Li(e^x)$ fra $x = 5$ til $x = 20$ med Interval af 0·2.

De i denne Tavle anførte Tal ere, med Undtagelse af Integrallogarithmerne fra $x = 5$ til $x = 7$, efter selvstændig Beregning. Værdierne fremtræde med en noget forskjellig Nøjagtighed, hidrørende navnlig fra, at den sidste Del af Tavlen fra $x = 14$ er beregnet først, og det oprindelig kun var paatænkt at beregne $Li(e^x)$ med en saadan Nøjagtighed, at log $Li(e^x)$ kunde bestemmes med 12 rigtige Decimaler. Gjennemgaaende kan det sidste Ciffer ikke anses for fuldt paalideligt, navnlig naar det i Tavlen er skrevet med mindre Ciffer end de andre, derimod vil der, da der i det hele taget regnedes med flere Cifre end her anført, og der kun er angivet de Cifre, for hvilke de anvendte Prøver stemte, ikke kunne være Tale om Unøjagtighed i det næstsidste Ciffer. Angaaende Beregningen af $Li(e^x)$ henvises til det efterfølgende Tillæg. Værdierne af e^x ere fundne ved ligefrem Multiplikation, saaledes at e^x først bestemtes for hele x, og nogle af disse Værdier prøvedes ved logarithmisk Beregning af e^x for samme x. Derved fik man tillige en let Kontrol paa Rigtigheden af de mellemliggende Værdier. I Forbigaaende bemærkes, at de i Egen's «Allgemeine Arithmetik» (Berlin 1833—34) anførte Værdier af e^x ved denne Lejlighed fandtes at være meget unøjagtige. Værdierne af e^x i den første Del af Tavlen ere simpelthen fundne ved Logarithmeopslag; de tilsvarende Værdier af $Li(e^x)$ ere angivne efter Bretschneider[1]). For Kontrollens Skyld er i Tavlen Differensen mellem to paa hinanden følgende Værdier af $Li(e^x)$ opført imellem disse.

Tab. III. Værdier af Funktionen $P(e^x)$ fra $x = 0$ til $x = 20$ med Interval af 0·1, med tilhørende Logarithmer m. m., er ligeledes efter selvstændig Beregning.

Denne Tavle, i hvilken log $P(e^x)$ skal opfattes som det principale, er beregnet paa følgende Maade. Da $P(e^x) = \frac{x}{[1].1s_2} + \frac{x^2}{[2].2s_3} + \frac{x^3}{[3].3s_4} + \ldots$, se (86), saa var det let ved Hjælp af Tabel I at danne en Tavle over Logarithmerne til de sukcessive Koefficienter i denne Række. Den første Del af Tavlen beregnedes derefter Led for Led ved Hjælp af disse Koefficienter ad logarithmisk Vej, desuden beregnedes for nogle af Værdierne op til $x = 15$ de tilsvarende Værdier af $P(e^x)$. Denne Beregning blev imidlertid paa Grund af Leddenes Antal snart uoverkommelig, hvorfor jeg valgte en anden Fremgangsmaade. Da nemlig $Li(e^x) - C - lx = P(e^x) + \frac{1}{2}P(e^{\frac{x}{2}}) + \frac{1}{3}P(e^{\frac{x}{3}}) + \ldots$, saa vil Differensen $(Li(e^x) - C - lx) - P(e^x)$ omtrent være lig $\frac{1}{2}P(e^{\frac{x}{2}})$ og altsaa saa lille, at en Rækkeudvikling for denne lettere kan beregnes direkte. Jeg beregnede derfor først Værdierne af Rækken

---

[1]) Schlömilch: Zeitschrift für Mathematik und Physik 1861.

$$Q(e^x) = \frac{s_2 - 1}{s_2} \cdot \frac{x}{[1].1} + \frac{s_3 - 1}{s_3} \cdot \frac{x^2}{[2].2} + \frac{s_4 - 1}{s_4} \cdot \frac{x^3}{[3].3} + \ldots, \tag{201}$$

hvorefter fandtes

$$P(e^x) = Li(e^x) - C - lx - Q(e^x). \tag{202}$$

Naar x blev saa stor, at der ved Beregning af Rækken $Q(e^x)$ maatte medtages flere end en halv Snes Led, saa benyttedes Rækken

$$R(e^x) = (Li(e^x) - C - lx) - P(e^x) - \frac{1}{2} P(e^{\frac{x}{2}})$$

$$= \frac{s_2 - 1 - 2^{-2}}{s_2} \cdot \frac{x}{[1].1} + \frac{s_3 - 1 - 2^{-3}}{s_3} \cdot \frac{x^2}{[2].2} + \frac{s_4 - 1 - 2^{-4}}{s_4} \cdot \frac{x^3}{[3].3} \ldots, \tag{203}$$

som direkte beregnedes Led for Led, hvorefter det var let at bestemme

$$P(e^x) = (Li(e^x) - C - lx) - \frac{1}{2} P(e^{\frac{x}{2}}) - R(e^x), \tag{204}$$

idet $P(e^{\frac{x}{2}})$ toges af den færdige Del af Tavlen.

Ved Udførelsen af Beregningen af Rækkerne $Q(e^x)$ og $R(e^x)$ benyttedes gjennemgaaende kun 5- eller 6-cifrede Logarithmer, saa at der i intet Tilfælde kunde gjøres Regning paa at faa flere end 4, højst 5 rigtige Decimaler, men dog altid tilstrækkelig mange til, at selve $P(e^x)$ kunde bestemmes saaledes, at i det mindste et Par Decimaler bleve rigtige, hvilket maa anses for nok. Som Prøve paa den rigtige Beregning af $Q(e^x)$ eller $R(e^x)$ anvendtes Differensprøver paa de 5-cifrede Logarithmer af disse Størrelser, idet det viste sig, at Logarithmerne af alle de her optrædende Funktioner variere saaledes, at 3die à 4de Differens blev forsvindende.

Paa Grund af denne Omstændighed fandtes det hensigtsmæssigere at danne en Tabel over log $P(e^x)$ end over selve $P(e^x)$, saa meget mere, som man da ikke behøvede direkte at beregne log $P(e^x)$ for alle de i Tavlen indgaaende Argumenter, men kunde nøjes med et ringere Antal og bestemme de mellemliggende Værdier ved Interpolation. Paa denne Maade fremkom da de i Tab. III indeholdte Værdier af log $P(e^x)$.

I Tabellen have vi under $P(e^x)$ for $x > 2$ kun anført de Fundamentalværdier, paa hvilke Beregningen af Logarithmerne i næste Rubrik hvile. Vi have i disse Tal medtaget alle Cifre, som de fremkom ved Beregningen, uagtet det sidste ialfald er meget upaalideligt, det næstsidste tvivlsomt. I de anførte Logarithmer, af hvilke omtrent Halvdelen er bestemt ved Interpolation, vil derimod Unøjagtigheden kunne betragtes som gjennemgaaende kun værende til Stede i det sidste Ciffer, hvilket ogsaa vil fremgaa ved Betragtning af de tilføjede Differenser. Det vil ses, at disse variere saa regelmæssigt, at det til Bestemmelsen af $P(e^x)$ med et Par rigtige Decimaler op til omtrent $x = 14$ vil være tilstrækkeligt at interpolere med 2den Differens af Logarithmen, og naar man kun bryder sig om at faa det hele Tal i $P(e^x)$ rigtigt eller højst et Par Decimaler, vil den her angivne Tavle være tilstrækkelig til en let og hurtig Udførelse af Regningen.

Til Bestemmelse af Primtalmængden op til n efter Riemann's Formel, naar denne indskrænkes til $P(n) + 1$, vil der da kun være at beregne ln og med denne som Argument af Tavlen udtage $\log P(n)$, hvorefter $P(n)$ findes ved et Opslag af Antilogarithmen. 7-cifrede Logarithmetavler ere ved denne Beregning tilstrækkelige for $n < 10$ Millioner og endnu noget derover. Denne Beregning kan med Hensyn til Vanskelighed ikke stilles ved Siden af Glaisher's Fremgangsmaade, og vi tro nok at turde paastaa, at Beregningen af «den lange Hale» ved den her angivne Methode er bleven en forholdsvis let Sag.

Da 7-cifrede Logarithmer af $P(e^x)$ for $x > 14$ kun kunne give det hele Tal i $P(e^x)$ fuldkommen nøjagtigt, og det er ønskeligt, navnlig hvis Tavlen skal fortsættes, at kunne erholde en større Nøjagtighed, have vi for $x > 10$ tilføjet i en særlig Rubrik $\log(Li(e^x) - P(e^x))$ med 6 Decimaler, beregnede ved Interpolation efter Briggs' Methode af de Fundamentalværdier, som ere anførte under $Li(e^x) - P(e^x)$. Denne Tavle er i Virkeligheden for Værdier af x fra $x = 8{\cdot}4$ beregnet før selve $P(e^x)$ og lagt til Grund ved Beregningen af de under $P(e^x)$ for $x = 10$ og opad anførte Fundamentalværdier.

Det skal endnu anføres, at Sammenligning med nogle af de af Glaisher beregnede Værdier har givet god Overensstemmelse mellem disse og dem, som findes ved Tabel III, saa at derved faas en Prøve paa dennes Rigtighed med Hensyn til de Cifre, hvorpaa det ved Anvendelsen kommer an.

Tab. IV. Antallet af Primtal i hvert Hundrede fra 1 til 10000 og i hvert Tusinde fra 1 til 100000, tilligemed tilsvarende Værdier af $\theta(x)$ for de første 100 Multipla henholdsvis af 100 og af 1000, og

Tab. V. Antallet af Primtal i hvert af de første 90 Hundredetusinder og tilsvarende Værdier af $\theta(x)$ for de første 90 Multipla af 10^5.

Disse Tavler angive Primtalmængder efter Optælling i Faktortavlerne. Den første er dannet ved Addition af de under Overskriften «Diff.» anførte Tal, som tildels ere tagne efter Gauss'[1]) Optælling, rettet af Meissel, og stemme med de af Glaisher i Faktortavlen for 6te Million angivne. Tallene i Tab. V ere paa lignende Maade dannede af en af Glaisher i «Report of British Association» for 1881 meddelt Tavle og senere sammenholdte med den af samme Forfatter meddelte Tabel i den nævnte Faktortavle. Det maa her ved Sammenligningen erindres, at Glaisher altid regner 1 med blandt Primtallene, hvorfor hans Tal skulle være en Enhed større end vore. Efter samme Forfatters Beregning meddeles den følgende Række Differenser $P(x) - \theta(x)$.

[1]) Tafel der Frequenz der Primzahlen. Gauss' Werke B. II.

Tab. VI. Sammenligning mellem Værdierne af θ og P for Tal op til e^{15}.

Hensigten med denne Tavle er angivet Side 250, hvor der tillige er givet Oplysning om, hvorledes de her optrædende Værdier af $\theta(e^x)$ ere fundne. Man ser, at selv i den første Del af Tavlen, hvor man skulde være tilbøjelig til at vente forholdsvis store Differenser, er $\theta - P$ dog altid meget nær ved 1, saasnart e^x overstiger 2 à 3 Enheder. Vi have endvidere dannet saavel Differensen $\theta - P - 1$ som dens Kvadrat og Middelafvigelsen, beregnet af hver 10 paa hinanden følgende Værdier i Tavlen, for derved at faa en Forestilling om, hvorledes denne Middelafvigelse varierer.

Tab. VII indeholder navnlig Værdierne af Funktionen $\psi(x)$ for Tallene fra 1 til 2000. Da Funktionen $\psi(x)$ ved disse Undersøgelser spiller en saa fremtrædende Rolle, forekom det mig ønskeligt at anstille en Sammenligning mellem denne Funktion og x, dels for at se, hvilken Værdi man rettest burde tillægge Konstanten k i Formlen $\psi(x) = x - k$, dels for at undersøge Størrelsen af Afvigelserne. I dette Øjemed dannedes Tabel VII, idet de naturlige Logarithmer af de dividerede Primtalpotenser med 8 Decimaler toges af Vega's Logarithmetabel (Udgaven af 1797) og adderedes, hvorved fremgik de under $\psi(n)$ opførte Tal. Da Vega for Tal $>$ 1000 kun anfører Primtallenes Logarithmer (op til 10000), var en Fortsættelse af Tavlen længere end til $x = 1000$ ikke strengt nødvendig, da det fornødne Materiale til en videregaaende Sammenligning kan faas ved umiddelbar Addition i selve Logarithmetavlen. Da det dog var ønskeligt at se, hvorledes $\psi(x)$ forholdt sig i Nærheden af det store Primtalinterval imellem 1300 og 1400, har jeg fortsat Tavlen op til $x = 2000$. Det vil ses, at $\psi(x)$ slutter sig gjennemgaaende meget nøje til $x - 1$, men jeg har ikke anset det for nødvendigt at anstille nogen detailleret Sammenligning, hvilket for øvrigt nu er en let Sag. Tavlen indeholder endvidere dels Angivelse af ethvert af de forekommende Primtals Nummer i Rækken, dels for Tallene op til 300 de sammensatte Tals Primfaktorer samt Faktorerne $\mu(x)$, endvidere Værdier af Summerne $\Sigma \frac{1}{x} \mu(x)$, endelig ligeledes for de laveste Tals Vedkommende Værdier af $\sum_2^n E \frac{n}{x}$ tilligemed Antallet af de Divisorer i n, som ere større end 1.

I det hele taget er denne Tabel kun tilføjet, fordi den selv i den nuværende Skikkelse giver nogen Oplysning, for selve Afhandlingen spiller den kun en underordnet Rolle og kan i Betydning neppe stilles ved Siden af de andre, selv om det altid har sin store Interesse, at man sættes i Stand til at se, hvorledes de forskjellige numeriske Funktioner forholde sig i den første Del af Talrækken, en Undersøgelse, som kun kan gjøres ved en Tabel som den foreliggende, og saavidt mig bekjendt foreligger en saadan ikke noget andet Sted.

§ 11. Slutning.

Naar vi til Slutning kaste et Tilbageblik over de i det foregaaende fundne Resultater, saa lader det sig ikke nægte, at det vundne Udbytte ikke synes at staa i et passende Forhold til det store Apparat, der er sat i Bevægelse. Vi have nemlig ikke naaet noget «stringent Bevis for, at en af Faktortavlerne uafhængig Funktion $f(x)$ slutter sig saaledes til $\theta(x)$, at $\mathrm{Lim}\,\frac{\theta(x)-f(x)}{f(x)}=0$». Alle de Midler, vi have anvendt, have kun kunnet føre til Paavisning af, at dette sandsynligvis gjælder om den Riemann'ske Funktion, som vi have betegnet ved $P(x)+1$, og at navnlig dennes Afvigelse fra $\theta(x)$ altid ligger indenfor Grænser af Ordenen $\sqrt{x}$. Om end mange Tegn tyde paa, at der maa endnu andre og mere indgaaende Undersøgelser til, inden et saadant Bevis kan gives, saa er det dog ikke usandsynligt, at vi med Hensyn til dette specielle Problem vilde være naaede videre ved alene at fæste Opmærksomheden paa de asymptotiske Værdier af de optrædende Funktioner. Men vi have med velberaad Hu ikke stillet os paa dette Standpunkt, fordi det i Virkeligheden er af større Vigtighed at kjende Tilnærmelsesformler, som kunne bruges for endelige Værdier af Argumenterne, og saadanne med det samme ville give de asymptotiske Tilnærmelsesformler.

Men noget er der alligevel opnaaet ved vore Undersøgelser, og tilmed tro vi, at dette er noget væsentligt. Hvad først Riemann's mærkelige Formel angaar, da have vi ikke blot ført Beviset for selve det Riemann'ske Integrals Fremkomst tilbage til forholdsvis simple Forudsætninger, som tilstede en dybere Indsigt i dets egentlige Natur, men ogsaa ved den Kommentar, der er givet til selve Behandlingen af dette Integral, fjernet alle der forekommende Vanskeligheder og bragt Klarhed tilveje med Hensyn til Uoverensstemmelsen mellem Riemann og Genocchi, om hvilken denne sidste selv udtrykker sig meget beskedent. Alle Vanskeligheder ved Riemann's Udvikling ere derved førte tilbage til Bestemmelsen af Udviklingen for $ls(r)$, et Problem, som kan behandles uden Hensyn til Læren om Primtallene. Tilmed have vi med Hensyn til Rødderne α kunnet give visse Vink, som forhaabentlig ville kunne komme fremtidige Undersøgelser til Gode. Af mere praktisk Betydning er dog den særlig smukke Form, i hvilken vi have bragt Funktionen $P(x)$, en Form, som har den store Fordel at kunne bruges til en let numerisk Beregning.

Fremdeles tillægge vi det nogen Betydning, at vi have fremdraget en Del spredte og lidet kjendte taltheoretiske Undersøgelser og ved at bringe disse i Forbindelse med den af Tchebycheff indførte Funktion $\psi(x)$ vist, at ogsaa disse lede til at betragte, ikke Funktionen $\theta(x)$, men $\vartheta(x)$ som den, der i disse Undersøgelser maa spille Hovedrollen.

Vi have derved naaet ved Betragtninger fra selve Tallæren at paavise den Rolle, som Integrallogarithmen maa spille ved Bestemmelsen af Primtalmængden, og selv om

Begrundelsen ikke er ganske tilfredsstillende, er den dog tilstrækkelig fyldestgjørende, til at man ad denne Vej vilde være bleven ledet til at opstille $Li(x)$ som Tilnærmelsesformel for $\vartheta(x)$, selv om ikke Riemann's Formel var fremkommen tidligere. Tillige synes der at være en Mulighed for ved en videre Udvikling af denne Art Undersøgelser at naa til en sikker Paavisning af Fejlgrænsens Afhængighed af $\sqrt{x}$, men dertil vil dog rimeligvis først fordres en mere indgaaende Undersøgelse af de Divisionsrester, som fremkomme, naar et Tal divideres med alle foregaaende Tal i Talrækken. Hvad der nemlig i det foregaaende stadig har mødt os som en væsentlig Hindring for at indsnevre Grænserne, er blandt andet netop den Omstændighed, at man for Differenser af Formen $\frac{n}{x} - E\frac{n}{x}$ ikke, selv om man har en Sum af saadanne, kan faa snævrere Grænser end 0 og 1. At der i denne Retning virkelig vil være noget at udrette, derom vidner blandt andet den i det foregaaende oftere omtalte Afhandling af Berger. Ogsaa en nøjere Drøftelse af de Problemer, som staa i Forbindelse med Rækker, som indeholde Faktorer $\mu(x)$, synes ved disse Undersøgelser at være meget ønskelig, ogsaa igjennem den vilde man muligvis naa til at udfylde Hullerne i den nærværende Fremstilling.

Hvilket Værd der kan tillægges denne, tilkommer det ikke Forfatteren at bedømme. Dog formener han, at der ved den her givne Paavisning af den indre Sammenhæng mellem de vigtigste hidtil anstillede Undersøgelser paa dette Gebet og navnlig af, at disse alle bestemt pege hen paa det selvsamme Resultat, er gjort et Arbejde, af hvis Udførelse paa en eller anden Maade et videre Fremskridt maa afhænge. Kun den, der er i Besiddelse af en Riemann's Geni, tør haabe paa et Felt, hvor saa mange store Mathematikere intet have kunnet udrette, at gjøre noget stort Fremskridt uden et forud gaaende grundigt Studium dels af Forgængernes Arbejder, dels af Videnskabens nuværende Hjælpemidler. Til at lette det dermed forbundne Arbejde tro vi, at nærværende Fremstilling maatte kunne bidrage noget. Men Arbejdet vil alligevel være stort, thi enhver, som har givet sig af med Tallenes Theori, vil vistnok sande Rigtigheden af den Sentens, som Degen efter Ovid satte som Motto paa sin «Canon Pellianus», og som vi ogsaa benytte som Motto for denne Afhandling:

«Est data lex numeris magnorum horrenda laborum».

Tillæg.

Om Beregning af Funktionen $Li(e^x)$.

Beregning af Fundamentalværdier af Integrallogarithmen er saavel af Bretschneider[1]) som af Glaisher[2]) udført ved direkte Beregning af de enkelte Led i Rækken

$$Li(e^x) = lx + C + \frac{x}{[1].1} + \frac{x^2}{[2].2} + \frac{x^3}{[3].3} + \dots \tag{1}$$

Denne Fremgangsmaade er ret praktisk, saa længe x kun tillægges smaa Værdier, men bliver, efterhaanden som x voxer, uoverkommelig. Bretschneider har derfor ogsaa kun fortsat sin egentlige Tavle op til $x = 7{\cdot}5$, medens Glaisher standser ved $x = 5$ og for højere Værdier kun angiver $Li(e^x)$ for hele x op til $x = 15$ inkl. samt for $x = 20$ (med 11 à 12 Decimaler). I Faktortavlen til 6te Million angiver han yderligere Værdien af Lie^{16}. — Hvorledes afdøde Professor Oppermann, som ogsaa har beskjæftiget sig med Beregning af Integrallogarithmen, idet han dog indskrænkede sig til at søge $Li(e^x)$ for hele x indtil 20, og Stenberg[3]) have regnet, er først senere bleven mig fuldt bekjendt (se nedenfor). Derimod har Bessel[4]) benyttet en af ham angiven Rækkeudvikling.

Den af mig anvendte Fremgangsmaade bestaar i en sukcessiv Beregning af Integraler af Formen

$$I(a, x) = \int_a^{a+x} \frac{e^x}{x} dx = e^a \int_0^x \frac{e^x}{a+x} dx. \tag{2}$$

Naar nemlig her x antages mindre end a, saa kan Faktoren $\frac{1}{a+x}$ udvikles i Række, hvorved faas

$$e^a \int_0^x \frac{e^x}{a+x} dx = \frac{e^a}{a}\left[\int_0^x e^x dx - \int_0^x e^x\left(\frac{x}{a}\right) dx + \int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \dots\right]. \quad (3$$

[1]) Schlömilch's Zeitschrift Vol. VI, p. 127—139.

[2]) Philosophical Transactions Vol. CLX, p. 367—388.

[3]) Tabulæ Logarithmi integralis, Malmogiæ 1861—1867—1871.

[4]) Abhandlungen Vol. II, p. 331.

Da $\frac{x}{a}$ er en ægte Brøk, vil denne Række konvergere, og naar man for x sætter en lille Størrelse, som er mindre end 1, medens a er et Tal, som er større end f. Ex. 7, saa kan man ved passende Valg af x bringe Rækken til at konvergere saa hurtig, som man ønsker.

Nu kunde man her behandle hvert af disse Integraler for sig og derved erholde en Række efter Potenser af x, hvilket f. Ex. Glaisher har gjort, men dette vilde være en Omvej. Det maa nemlig erindres, at det slet ikke kommer an paa at finde en Udvikling, der skal bruges til analytiske Undersøgelser, men at det meget snarere kommer an paa at fremstille en Række sukcessive ensartede Regneoperationer, hvis fortsatte Anvendelse kunne tjene til Beregning af den forelagte Rækkes enkelte Led uden Hensyn til, hvorledes disses analytiske Form monne være. Og denne Opgave er let at løse. Da man nemlig ved Beregningen af de enkelte Led faar Integraler af Formen $\int e^x x^n dx$, og ved delvis Integration haves

$$\int_0^x e^x x^n dx = \frac{e^x x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^x e^x x^{n+1} dx,$$

eller omvendt

$$\int_0^x e^x x^{n+1} dx = e^x x^{n+1} - (n+1)\int_0^x e^x x^n dx, \tag{4}$$

saa ses, at hvert Led i Rækken (3) maa kunne findes, ved en rekurrent Beregning, af det nærmest foregaaende. Vi behøve ikke at bekymre os om, at dette derved optræder multipliceret med en Faktor $(n+1)$, da Rækkens Konvergens er sikker, og Fejlens Indflydelse neutraliseres ved den paafølgende Division med en Potens af a.

Idet vi altsaa ved A_n betegne Integralet $\int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right)^n dx$, hvor n er et helt Tal, saa haves først

$$I(a, x) = \frac{e^a}{a}(A_0 - A_1 + A_2 \ldots), \tag{5}$$

samt almindelig

$$A_{n+1} = \frac{e^x x^{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{n+1}{a} A_n. \tag{6}$$

Da man har

$$A_0 = \int_0^x e^x dx = e^x - 1,$$

saa blive de første Led i Rækken (3): N_0, $-N_1$, $N_2 \ldots$ bestemte ved

$$N_0 = \frac{e^{a+x} - e^a}{a}, \quad N_1 = \frac{e^{a+x}\left(\frac{x}{a}\right) - 1.N_0}{a}, \quad N_2 = \frac{e^{a+x}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2.N_1}{a} \text{ o. s. v.} \tag{7}$$

Sætter man her a lig et helt Tal og $x = 1$, saa faas, naar man i Forvejen har beregnet en Tavle over Potenser af e^x og ved Division med a deraf danner Værdier af $e^{a+x} : a^n$, et forholdsvis let Middel til at bestemme Værdierne af Integralerne $\int_a^{a+1} \frac{e^x}{x} dx$. Paa denne Maade er Beregningen af Integrallogarithmen til e^x for $x = 16, 17, 18, 19$ og 20 udført for i Forbindelse med de af Glaisher angivne Værdier for hele x at kunne benyttes til Kontrol ved Beregningen af de mellemliggende Værdier i Tab. II.

Disse ere fundne ved at bemærke, at et Integral af Formen

$$\int_{-x}^{+x} \frac{e^{a+x}}{a+x} dx$$

ved Udvikling paa lignende Maade som ovenfor giver en Række af Formen

$$\int_{-x}^{+x} \frac{e^{a+x}}{a+x} dx = \frac{e^a}{a}\left[\int_{-x}^{+x} e^x dx - \int_{-x}^{+x} e^x \left(\frac{x}{a}\right) dx + \int_{-x}^{+x} e^x \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \ldots\right] = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 \ldots, \quad (8)$$

hvor det vil vise sig, at Leddene med negative Fortegn blive af forholdsvis ringere Betydning end i foregaaende Tilfælde, saaledes at den numeriske Værdi af et negativt Led nærmer sig stærkt til den af det følgende positive.

For øvrigt fører delvis Integration her til ganske lignende Resultater som i foregaaende Tilfælde, kun med den Ændring, at man erholder

$$\left.\begin{aligned} N_0 &= \frac{e^{a+x} - e^{a-x}}{a}, \quad N_1 = \frac{(e^{a+x} + e^{a-x})\left(\frac{x}{a}\right) - 1.N_0}{a}, \quad N_2 = \frac{(e^{a+x} - e^{a-x})\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2.N_1}{a}, \\ N_3 &= \frac{(e^{a+x} + e^{a-x})\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3.N_2}{a}, \quad \text{o. s. v.} \end{aligned}\right\} (9)$$

Da man kunde sætte Udtrykket for Integralet under Formen

$$\int_{-x}^{+x} \frac{e^{a+x}}{a+x} dx = \frac{e^a}{a}\int_{-x}^{+x} e^x dx - \frac{e^a}{a^2}\int_{-x}^{+x} e^x x\, dx + \frac{e^a}{a^3}\int_{-x}^{+x} e^x x^2 dx + \ldots \quad (10)$$

saa vilde man ogsaa, hvis man skal beregne en længere Række af Integraler svarende til samme x, kunne have Fordel af engang for alle at bestemme de numeriske Værdier af de Integraler, der optræde som Koefficienter til $\frac{e^a}{a^m}$, hvorefter en logarithmisk Beregning af det paagjældende Led er let, saafremt 7-cifrede Tavler give tilstrækkelig Nøjagtighed.

Det vil herefter være klart, hvorledes dette kunde tjene til paa en forholdsvis let Maade at beregne den i Tab. II meddelte Tavle. Først beregnedes nemlig Værdierne af e^x for Intervaller af $\frac{2}{10}$, og ved derefter i Formlen (8) at antage $x = \frac{1}{10}$ fandtes ved ligefrem Anvendelse af (9) Værdierne af N_0, N_1, N_2. De følgende Led bestemtes logarithmisk ved

Hjælp af de engang for alle beregnede Værdier af Integraler af Formen $\int_{-0\cdot1}^{+0\cdot1} e^x x^m dx$ for $m = 3, 4, 5$ o. s. v. Det var til Opnaaelsen af den Nøjagtighed, der ønskedes, ikke nødvendigt at medtage flere end 7 à 8 Led, da den anvendte Rækkeudvikling er meget stærkt konvergerende. For $a = 12\cdot5$ fik man f. Ex.

$$\begin{aligned} N_0 &= 4300\cdot55582\,39903\,5097 \\ -N_1 &= -1\cdot14605\,10705\,4886 \\ N_2 &= 9186\,74014\,4756 \\ -N_3 &= -4\,40167\,3 \\ N_4 &= 35297\,20 \\ -N_5 &= -20\,13 \\ N_6 &= 1\,61 \end{aligned}$$

altsaa
$$\int_{12\cdot4}^{12\cdot6} \frac{e^x}{x} dx = 4299\cdot50159\,98323\,9.$$

Af disse Integraler fremgik derefter ved Addition de sukcessive Værdier af $Li(e^x)$, og en fortrinlig Prøve paa Regningens Rigtighed havdes ved Sammenligning med de allerede beregnede Værdier for hele x. Vi fik herved tillige en Bekræftelse paa Rigtigheden af de af Glaisher beregnede Værdier, for saa vidt som disse kunde kontrolleres, altsaa med Undtagelse af det sidste Par Cifre.

Det vilde, hvis der fra Begyndelsen af havde været lagt an derpaa, kun have været en forholdsvis ringe Forøgelse af Arbejdet at beregne nogle flere Decimaler, idet der dertil navnlig kun vilde behøves nogle flere rigtige Cifre i Potenserne af e. Men som allerede bemærket var det oprindelig kun Hensigten at erholde 12 à 14 rigtige Cifre, og Meningen var derefter ved Beregning af Logarithmerne til disse og paafølgende Interpolation at danne en Tavle, ikke over selve $Li(e^x)$, men over dens Logarithmer. Thi, som det vil ses ved Sammenligning med Tab. III, vil en saadan Tavle paa Grund af den Lethed, hvormed der kan interpoleres i den, være saa bekvem, at den hidtil saa gjenstridige Funktion $Li(x)$ derved vilde være draget ind under den Række Funktioner, som kunde betragtes som fuldstændig bekjendte for alle Værdier op til den Grænse, som Tavlen angav.

Imidlertid blev ved nærmere Overvejelse denne Tanke opgivet, dels fordi det til Opnaaelsen af det specielle Formaal, hvortil den skulde tjene, befandtes hensigtsmæssigere at konstruere den Tavle, der er meddelt i Tab. III, dels fordi en Fundamentaltavle som den omtalte som Argument rettest burde indeholde ikke naturlige, men Briggiske Logarithmer.

I den Form, hvori Tavlen her foreligger, vil den i hvert Tilfælde kunne tjene til Fundament for en saadan Tavle, da Overgangen til andre Værdier end de Argumenter, der findes i Tavlen, forholdsvis let kan gjøres, enten ved Hjælp af de her angivne eller ved andre bekjendte Formler.

Senere Anm. Efter Fuldendelsen af det foreliggende Arbejde er jeg bleven bekjendt med to andre værdifulde Bidrag til Beregning af Integrallogarithmen. Det ene er den ovenfor nævnte Tavle af Stenberg, af hvilket Værk jeg tidligere kun kjendte anden Del, der gaar til $Li(10^{3\cdot5})$, medens det senere er lykkedes mig at erhverve et fuldstændigt Exemplar af Tavlen. Det viste sig da, at Forfatteren i en Pars III, udkommen 1871, har fortsat Tavlen fra $Li(10^{3\cdot5})$ indtil $Li(10^{10})$. Argumenterne ere de Briggiske Logarithmer med Interval 0·01. Værdierne ere beregnede med 14 Cifre, og der er tilføjet Differenser for at lette Interpolationen, medens Forfatteren dog ikke har været opmærksom paa Hensigtsmæssigheden af et tabulere $\log Li(x)$ i Stedet for selve $Li(x)$, hvorved Tavlens Omfang vilde have kunnet indskrænkes betydeligt. Men i hvert Fald fortjener Arbejdet den største Anerkjendelse, og det maa kun beklages, at Tavlen synes at være en Sjældenhed. Hverken Glaisher eller afdøde Professor Oppermann, som maatte anses for at have særligt Kjendskab til, hvad der var udrettet paa dette Omraade, have omtalt denne sidste Del af Tavlen, og det Exemplar, hvoraf jeg er kommen i Besiddelse, har maattet forskaffes ad antikvarisk Vej.

I Indledningen til 3die Del af sin Tavle gjør Stenberg Rede for, hvorledes denne Del er beregnet, og udvikler blandt andet de selvsamme Formler, som ere anførte ovenfor, tilligemed forskjellige andre lignende, som han har benyttet til Beregning af de Fundamentalværdier, som ligge til Grund for hans Tavle.

Det andet Bidrag indeholdes i afdøde Professor Oppermann's Papirer. Det er bekjendt, at denne Mathematiker beskjæftigede sig med Beregning af Integrallogarithmer, men om den Methode, han benyttede, har han ikke givet nogen Meddelelse. Af hans mundtlige Udsagn fremgik kun, at han anlagde sin Regning saaledes, at den med det samme kunde give Værdierne af de sukcessive Differentialkoefficienter. Heller ikke i hans Papirer indeholdes nogen sammenhængende Meddelelse om dette Punkt, men derimod findes de originale Beregninger, som han har foretaget, og af disse er det ikke vanskeligt at se, hvorledes Regningen er udført. Fremgangsmaaden, som i Virkeligheden er særdeles elegant, kan udtrykkes ved Formlerne

$$\left.\begin{aligned} Li(e^{\alpha+\xi}) - Li(e^{\alpha}) &= \frac{e^{\alpha}\xi}{\alpha}\left(A_0 + \frac{1}{2}A_1\xi + \frac{1}{3}A_2\xi^2 + \frac{1}{4}A_3\xi^3 + \ldots\right) \\ Li(e^{\alpha}) - Li(e^{\alpha-\xi}) &= \frac{e^{\alpha}\xi}{\alpha}\left(A_0 - \frac{1}{2}A_1\xi + \frac{1}{3}A_2\xi^2 - \frac{1}{4}A_3\xi^3 + \ldots\right), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

hvor

$$A_0 = 1\,, \qquad A_1 = 1 - \frac{A_0}{\alpha}\,, \qquad A_2 = \frac{1}{1.2} - \frac{A_1}{\alpha}\,, \qquad A_3 = \frac{1}{1.2.3} - \frac{A_2}{\alpha}\,, \quad \text{o. s. v.} \tag{12}$$

Disse Formler tilstede, naar først Potenserne af e ere beregnede, en rekurrent Beregning af de enkelte Led og give derefter Værdierne af begge Integraler

$$\int_{a-\xi}^{a} \frac{e^x}{x}\, dx \quad \text{og} \quad \int_{a}^{a+\xi} \frac{e^x}{x}\, dx.$$

Fordelen ved denne Methode bestaar i, at den giver en Kontrol paa Regningens Rigtighed, idet hvert enkelt af disse Integraler, naar Intervallet ξ overalt er det samme, bliver beregnet to Gange uden nogen synderlig Forøgelse i Arbejdet. Ved denne Fremgangsmaade har Oppermann fundet Differenserne af $Li(e^x)$ for hele x fra $x = 8$ til $x = 20$, og Regningerne forelaa i en saadan Form, at der kun behøvedes en Sammenstilling af Resultaterne for, ved at gaa ud fra de af Bretschneider angivne Værdier, at faa de tilsvarende Værdier af $Li(e^x)$.

Værdierne af e^x vare dels tagne efter Schulze[1]), dels fundne ved logarithmisk Beregning, saaledes at de tilsvarende Differenser af Integrallogarithmen vare bestemte med mindst 21 rigtige Decimaler, med Undtagelse af de tre sidste, hvor Oppermann kun havde faaet 12 rigtige Decimaler. For at komplettere Resultaterne har jeg selv foretaget Beregningen for de sidstes Vedkommende og anfører nedenfor alle de saaledes fundne Værdier af $Li(e^x)$ fra $x = 10$ til $x = 20$, idet $Li(e^{10})$ er anført efter Bretschneider. For saa vidt Regningen kunde sammenlignes med de af ham angivne Værdier for lavere x, fandtes disse rigtige. — Ligeledes er der tilføjet Værdierne af e^x, som for $x > 13$ ere beregnede af mig ved som Udgangspunkt at tage de af Oppermann med mange Cifre angivne Værdier af e^{10}, e^{11}, e^{12}, e^{13}, e^{15}, og som Kontrol den ligeledes af ham beregnede Værdi af e^{20}.

I Forbindelse med de af Bretschneider beregnede Værdier danne altsaa disse en Tabel over Fundamentalværdier af $Li(e^x)$ med 20 Decimaler op til e^{20}.

x	e^x	$Li\,(e^x)$
10	22026·465794 806716 516957 900645	2492·228976 241877 759138 44
11	59874·141715 197818 455326 485792	6071·406374 098611 507964 88
12	162754·791419 003920 808005 204898	14959·532666 397528 852292 46
13	442413·392008 920503 326102 775949	37197·688490 689035 604391 64
14	1202604·284164 776777 749236 770768	93192·513633 965371 298824 52
15	3269017·372472 110639 301855 046092	234955·852490 768303 578245 74
16	8886110·520507 872636 763023 740781	595560·998670 837001 850161 00
17	24154952·753575 298214 775435 180386	1516637·894042 516884 432797 43
18	65659969·137330 511138 786503 259060	3877904·330597 443502 996466 07
19	178482300·963187 260844 910033 788723	9950907·251046 844760 026002 53
20	485165195·409790 277969 106830 541541	25615652·664056 588820 481120 80

[1]) Schulze: Sammlung logar. trig. Tafeln. Berlin 1778. I, S. 188.

Tab. I. Værdier af reciproke Potenssummer og deres Logarithmer.

r	$s_r = \sum_1^\infty n^{-r}$	log nat. s_r	$\log_{10} s_r$	$\sum_2^\infty p^{-r}$	r
1	0·57721 56649 015329 $+ l\infty$			$-$0·31571 84520 73890 $+ ll\infty$	1
2	1·64493 40668 482264	0·49770 03024 70745	0·21614 84950 04624	0·45224 74200 41065	2
3	1·20205 69031 595943	0·18403 41753 91491	0·07992 50268 54140	0·17096 26392 99444	3
4	1·08232 32337 111382	0·07910 98730 67336	0·03435 69813 37211	0·07699 31397 64247	4
5	1·03692 77551 433700	0·03626 22596 49228	0·01574 84992 67003	0·03575 50164 83924	5
6	1·01734 30619 844491	0·01719 43876 02658	0·00746 74276 55540	0·01707 00868 50637	6
7	1·00834 92773 819227	0·00831 46149 69275	0·00361 09914 00306	0·00828 38328 56134	7
8	1·00407 73561 979443	0·00406 90663 07413	0·00176 71730 43808	0·00406 14053 66518	8
9	1·00200 83928 260822	0·00200 63787 01528	0·00087 13591 98682	0·00200 44675 74962	9
10	1·00099 45751 278180	0·00099 40808 65669	0·00043 17238 34526	0·00099 36035 74437	10
11	1·00049 41886 041194	0·00049 40665 33147	0·00021 45703 69039	0·00049 39472 69104	11
12	1·00024 60865 533080	0·00024 60562 78979	0·00010 68608 84198	0·00024 60264 70035	12
13	1·00012 27133 475785	0·00012 27058 18911	0·00005 32904 60051	0·00012 26973 67528	13
14	1·00006 12481 350587	0·00006 12462 59468	0·00002 65989 12524	0·00006 12443 96725	14
15	1·00003 05882 363070	0·00003 05877 68496	0·00001 32840 99072	0·00003 05873 02823	15
16	1·00001 52822 594086	0·00001 52821 42636	0·00000 66369 50219	0·00001 52820 26219	16
17	1·00000 76371 976379	0·00000 76371 68475	0·00000 33167 80126	0·00000 76371 39371	17
18	1·00000 38172 932650	0·00000 38172 85979	0·00000 16578 26237	0·00000 38172 78703	18
19	1·00000 19082 127166	0·00000 19082 10896	0·00000 08287 25462	0·00000 19082 09077	19
20	1·00000 09539 620339	0·00000 09539 61579	0·00000 04143 00249	0·00000 09539 61124	20
21	1·00000 04769 329868	0·00000 04769 32873	0·00000 02071 29315	0·00000 04769 32759	21
22	1·00000 02384 505027	0·00000 02384 50474	0·00000 01035 57725	0·00000 02384 50446	22
23	1·00000 01192 199260	0·00000 01192 19919	0·00000 00517 76553	0·00000 01192 19912	23
24	1·00000 00596 081891	0·00000 00596 08187	0·00000 00258 87507	0·00000 00596 08185	24
25	1·00000 00298 035035	0·00000 00298 03503	0·00000 00129 43497	0·00000 00298 03503	25
26	1·00000 00149 015548	0·00000 00149 01555	0·00000 00064 71663	0·00000 00149 01555	26
27	1·00000 00074 507118	0·00000 00074 50712	0·00000 00032 35803	0·00000 00074 50712	27
28	1·00000 00037 253340	0·00000 00037 25334	0·00000 00016 17892	0·00000 00037 25334	28
29	1·00000 00018 626597	0·00000 00018 62660	0·00000 00008 08943	0·00000 00018 62660	29
30	1·00000 00009 313274	0·00000 00009 31327	0.00000 00004 04470	0·00000 00009 31327	30
31	1·00000 00004 656629	0·00000 00004 65663	0·00000 00002 02235	0·00000 00004 65663	31
32	1·00000 00002 328312	0·00000 00002 32831	0·00000 00001 01117	0·00000 00002 32831	32
33	1·00000 00001 164155	0·00000 00001 16416	0·00000 00000 50559	0·00000 00001 16416	33
34	1·00000 00000 582077	0·00000 00000 58208	0·00000 00000 25279	0·00000 00000 58208	34
35	1·00000 00000 291038	0·00000 00000 29104	0·00000 00000 12640	0·00000 00000 29104	35

Tab. II. **Værdier af e^x og $Li(e^x)$ fra $x = 5$ til $x = 20$.**

x	e^x	$Li(e^x)$ med Diff.	x
5·0	148·41315 91025 76603	40·18527 53558	5·0
		6·43957 51500	
5·2	181·2722	46·62485 05058	5·2
		7·56862 52952	
5·4	221·4064	54·19347 58010	5·4
		8·90831 01733	
5·6	270·4264	63·10178 59743	5·6
		10·49900 13764	
5·8	330·2995	73·60078 73507	5·8
		12·38897 47917	
6·0	403·42879 34927 35123	85·98976 21424	6·0
		14·63597 97982	
6·2	492·7491	100·62574 19406	6·2
		17·30912 37596	
6·4	601·8451	117·93486 57002	6·4
		20·49113 57080	
6·6	735·0952	138·42600 14082	6·6
		24·28108 61632	
6·8	897·8474	162·70708 75714	6·8
		28·79765 57641	
7·0	1096·63315 84284 58599	191·50474 33355	7·0
		34·18306 43656	
7·2	1339·43076 43944 17830	225·68780 77011	7·2
		40·60779 51225	
7·4	1635·98442 99959 26540	266·29560 28236	7·4
		48·27627 56745	
7·6	1998·19589 51041 17959	314·57187 84981	7·6
		57·43371 18197	
7·8	2440·60197 76244 99077	372·00559 03178	7·8
		68·37430 92170	
8·0	2980·95798 70417 28275	440·37989 95348	8·0
		81·45116 70866	
8·2	3640·95030 73323 54722	521·83106 66214	8·2
		97·08818 63407	
8·4	4447·06674 76998 56086	618·91925 29621	8·4
		115·79440 51176	
8·6	5431·65959 13629 80322	734·71365 80797	8·6
		138·18125 98486	
8·8	6634·24400 62778 85159	872·89491 79283	8·8
		164·98337 27888	
9·0	8103·08392 75753 84008	1037·87829 07171	9·0
		197·08359 10581	
9·2	9897·12905 87439 15887	1234·96188 17752	9·2
		235·54315 21150	
9·4	12088·38073 02169 84398	1470·50503 38902	9·4
		281·63803 15825	
9·6	14764·78156 55772 72616	1752·14306 54727	9·6
		336·90274 79587	
9·8	18033·74492 78285 11246	2089·04581 34314	9·8
		403·18316 28105	
10·0	22026·46579 48067 16517	2492·22897 62419	10·0

Tab. II. Fortsættelse.

x	e^x	$Li(e^x)$ med Diff.	x
10·0	22026·46579 48067 16517	2492·22897 62419	10·0
		482·70013 40763	
10·2	26903·18607 42975 610$_0$	2974·92911 03182	10·2
		578·12626 55450	
10·4	32859·62567 44433 127$_6$	3553·05537 58632	10·4
		692·67846 13398	
10·6	40134·83743 08757 931$_1$	4245·73383 72030	10·6
		830·22955 70955	
10·8	49020·80113 63817 183$_0$	5075·96339 42985	10·8
		995·44297 98001	
11·0	59874·14171 51978 18455	6071·40637 40986	11·0
		1193·93521 05557	
11·2	73130·44183 34154 973$_1$	7265·34158 46543	11·2
		1432·47181 85356	
11·4	89321·72336 08055 557$_0$	8697·81340 31899	11·4
		1719·20403 61833	
11·6	1 09097·79927 65075 804$_3$	10417·01743 93732	11·6
		2063·95429 87441	
11·8	1 33252·35294 55309 397$_4$	12480·97173 81173	11·8
		2478·56092 82802	
12·0	1 62754·79141 90039 20808	14959·53266 63975	12·0
		2977·29426 71874	
12·2	1 98789·15114 29545 304$_0$	17936·82693 35849	12·2
		3577·35913 61378	
12·4	2 42801·61749 83235 410$_2$	21514·18606 97227	12·4
		4299·50159 98324	
12·6	2 96558·56529 82029 281$_3$	25813·68766 95551	12·6
		5168·74178 41202	
12·8	3 62217·44961 12478 850$_2$	30982·42945 36753	12·8
		6215·25903 70137	
13·0	4 42413·39200 89205 03326	37197·68849 06890	13·0
		7475·46122 9807$_5$	
13·2	5 40364·93724 66919 42$_9$	44673·14972 0496$_5$	13·2
		8993·27665 3850$_9$	
13·4	6 60003·22476 61566 27$_7$	53666·42637 4347$_4$	13·4
		10821·71502 6877$_3$	
13·6	8 06129·75912 39902 17$_0$	64488·14140 1224$_7$	13·6
		13024·75387 4838$_5$	
13·8	9 84609·11122 90349 84$_7$	77512·89527 6063$_2$	13·8
		15679·61835 7902$_2$	
14·0	12 02604·28416 47767 7775	93192·51363 39654	14·0
		18879·53689 496$_7$	
14·2	14 68864·18965 4095$_0$	112072·05052 893$_2$	14·2
		22737·07223 345$_4$	
14·4	17 94074·77260 6214$_4$	134809·12276 238$_6$	14·4
		27388·14854 469$_9$	
14·6	21 91287·87560 6809$_8$	162197·27130 708$_5$	14·6
		32996·92046 855$_4$	
14·8	26 76445·05518 9096$_7$	195194·19177 563$_9$	14·8
		39761·66071 512$_9$	
15·0	32 69017·37247 21106	234955·85249 0768	15·0

Tab. II. Fortsættelse.

x	e^x	$Li(e^x)$	x
15·0	32 69017·37247 21106	234955·85249 077	15·0
		47921·87998 516	
15·2	39 92786·83521 09471	282877·73247 593	15·2
		57766·93796 061	
15·4	48 76800·85327 22663	340644·67043 654	15·4
		69646·45860 029	
15·6	59 56538·01318 46158	410291·12903 683	15·6
		83982·92895 992	
15·8	72 75331·95838 95878	494274·05799 675	15·8
		101286·94067 409	
16·0	88 86110·52050 78726	595560·99867 084	16·0
		122175·63004 051	
16·2	108 53519·89906 44180	717736·62871 135	16·2
		147394·98990 569	
16·4	132 56519·14046 35683	865131·61861 704	16·4
		177846·86860 347	
16·6	161 91549·04176 52862	1042978·48722 051	16·6
		214621·64329 086	
16·8	197 76402·65849 77755	1257600·13051 137	16·8
		259037·76353 115	
17·0	241 54952·75357 52982	1516637·89404 252	17·0
		312689·61360 869	
17·2	295 02925·91644 54584	1829327·50765 121	17·2
		377505·44818 360	
17·4	360 34955·08814 16391	2206832·95583 481	17·4
		455817·52685 488	
17·6	440 13193·53483 40439	2662650·48268 969	17·6
		550447·02275 701	
17·8	537 57835·97888 36562	3213097·50544 670	17·8
		664806·82515 074	
18·0	656 59969·13733 05111	3877904·33059 744	18·0
		803026·01631 899	
18·2	801 97267·40504 71134	4680930·34691 643	18·2
		970100·60347 551	
18·4	979 53163·60543 32304	5651030·95039 194	18·4
		1172076·05659 938	
18·6	1196 40264·19819 05134	6823107·00699 132	18·6
		1416268·37920 758	
18·8	1461 28948·67868 13127	8239375·38619 890	18·8
		1711531·86484 794	
19·0	1784 82300·96318 72608	9950907·25104 684	19·0
		2068583·42063 066	
19·2	2179 98774·67921 04573	12019490·67167 750	19.2
		2500395·43482 031	
19·4	2662 64304·66872 50453	14519886·10649 781	19·4
		3022671·70651 305	
19·6	3252 15956·12198 05563	17542557·81301 086	19·6
		3654424·03649 959	
19·8	3972 19665·80508 38217	21196981·84951 045	19·8
		4418670·81454 614	
20·0	4851 65195·40979 02780	25615652·66405 659	20·0

Tab. III. Værdier af Funktionen $P(e^x)$ med tilhørende Logarithmer m. m.

x	$P(e^x)$	$\log P(e^x)$	Δ'	Δ''
0·0	0·0000$_0$			
0·1	0·0629$_2$	8·79883		
0·2	0·1303$_3$	9·11505		
0·3	0·2025$_7$	9·30657		
0·4	0·2800$_2$	9·44719		
0·5	0·3630$_5$	9·55997		
0·6	0·4521$_5$	9·65528		
0·7	0·5477$_9$	9·73861		
0·8	0·6504$_5$	9·81322		
0·9	0·7607$_0$	9·88121		
1·0	0·8791$_8$	9·94408		
1·1	1·0065$_1$	0·00281		
1·2	1·1434$_1$	0·05820		
1·3	1·2906$_5$	0·11081	5028	
1·4	1·4490$_8$	0·16109	4831	—197
1·5	1·6195$_6$	0·20940	4663	—168
1·6	1·8031$_4$	0·25603	4518	—145
1·7	2·0008$_3$	0·30121	4393	—125
1·8	2·2138$_2$	0·34514	4285	—108
1·9	2·4433$_7$	0·38799	4189	— 96
2·0	2·6908$_4$	0·42988	4107	— 82
2·1		0·47095	4034	— 73
2·2	3·2456$_0$	0·51129	3970	— 64
2·3		0·55099	3913	— 57
2·4	3·8915$_5$	0·59012	3864	— 49
2·5		0·62876	3820	— 44
2·6	4·6446$_9$	0·66696	3781	— 39
2·7		0·70477	3746	— 35
2·8	5·5236$_4$	0·74223	3717	— 29
2·9		0·77940	3690	— 27
3·0	6·5508$_4$	0·81630	3667	— 23
3·1		0·85297	3647	— 20
3·2	7·7525$_4$	0·88944	3630	— 17
3·3	8·4283$_9$	0·92574	3615	— 15
3·4	9·1598$_9$	0·96189	3603	— 12
3·5	9·9521$_5$	0·99792	35910	— 120
3·6	10·8101$_1$	1·033830	35819	— 91
3·7		1·069649	35749	— 70
3·8	12·7467$_2$	1·105398	35688	— 61
3·9		1·141086	35642	— 46
4·0	15·0219$_9$	1·176728	35606	— 36
4·1		1·212334	35579	— 27
4·2	17·6975$_6$	1·247913	35567	— 12
4·3		1·283480	35562	— 5
4·4	20·8469$_3$	1·319042	35565	+ 3
4·5	22·626$_0$	1·354607	35575	+ 10
4·6	24·5573$_7$	1·390182	35592	+ 17
4·7		1·425774	35616	+ 24
4·8	28·9327$_9$	1·461390	35645	+ 29
4·9		1·497035	35677	+ 32
5·0	34·0967$_0$	1·532712		+ 39

x	$P(e^x)$	$\log P(e^x)$	Δ	Δ''
5·0	34·0967$_0$	1·532712	35716	39
5·1		1·568428	35758	42
5·2	40·1963$_3$	1·604186	35804	46
5·3		1·639990	35852	48
5·4	47·4069$_5$	1·675842	35904	52
5·5	51·4927$_0$	1·711746	35960	56
5·6	55·9378$_2$	1·747706	36015	55
5·7		1·783721	36072	57
5·8	66·0378$_7$	1·819793	36133	61
5·9		1·855926	36195	62
6·0	78·0048$_3$	1·892121	36258	63
6·1		1·928379	36322	64
6·2	92·1936$_6$	1·964701	36387	65
6·3		2·001088	36451	64
6·4	109·0283$_0$	2·037539	36518	67
6·5	118·592$_2$	2·074057	36584	66
6·6	129·0152$_3$	2·110641	36651	67
6·7		2·147292	36718	67
6·8	152·7601$_2$	2·184010	36785	67
6·9		2·220795	36851	66
7·0	180·9866$_1$	2·257646	36919	68
7·1		2·294565	36986	67
7·2	214·5608$_8$	2·331551	37051	65
7·3		2·368602	37118	67
7·4	254·5189$_4$	2·405720	37184	66
7·5		2·442904	37248	64
7·6	302·1011$_9$	2·480152	37314	66
7·7		2·517466	37378	64
7·8	358·7927$_5$	2·554844	374411	63
7·9		2·5922851	375044	633
8·0	426·3728$_2$	2·6297895	375669	625
8·1		2·6673564	376286	617
8·2	506·9731$_8$	2·7049850	376898	612
8·3		2·7426748	377501	603
8·4	603·1494$_6$	2·7804249	378098	597
8·5		2·8182347	378688	590
8·6	717·9654$_0$	2·8561035	379270	582
8·7		2·8940305	379845	575
8·8	855·0963$_8$	2·9320150	380412	567
8·9		2·9700562	380971	559
9·0	1018·951$_0$	3·0081533	381523	552
9·1		3·0463056	382067	544
9·2	1214·821$_1$	3·0845123	382604	537
9·3		3·1227727	383133	529
9·4	1449·058$_8$	3·1610860	383653	520
9·5		3·1994513	384168	515
9·6	1729·291$_5$	3·2378681	384674	506
9·7		3·2763355	385173	499
9·8	2064·680$_2$	3·3148528	385663	490
9·9		3·3534191	386147	484
10·0	2466·231$_6$	3·3920338		477

Tab. III. Fortsættelse.

x	$P(e^x)$	$\log P(e^x)$	Δ'	Δ''	$Li(e^x)-P(e^x)$	$\log(Li(e^x)-P(e^x))$	Δ'	Δ''
					25·166$_2$		14112	
10·0	2466·231$_6$	3·3920338	386624	477		1·414929	14184	72
10·1		3·4306962	387093	469		1·429113	14258	74
10·2	2947·172$_2$	3·4694055	387555	462	27·756$_9$	1·443371	14332	74
10·3		3·5081610	388010	455		1·457703	14405	73
10·4	3523·399$_7$	3·5469620	388457	447		1·472108	14478	73
10·5		3·5858077	388897	440	30·661$_0$	1·486586	14550	72
10·6	4214·028$_2$	3·6246974	389332	435		1·501136	14623	73
10·7		3·6636306	389760	428		1·515759	14694	71
10·8	5042·043$_6$	3·7026066	390180	420	33·919$_8$	1·530453	14765	71
10·9		3·7416246	390595	415		1·545218	14837	72
11·0	6035·094$_0$	3·7806841	391002	407		1·560055	14908	71
11·1		3·8197843	391403	401	37·580$_5$	1·574963	14978	70
11·2	7226·442$_3$	3·8589246	391798	395		1·589941	15048	70
11·3		3·8981044	392187	389		1·604989	15117	69
11·4	8656·116$_3$	3·9373231	392570	383	41·697$_1$	1·620106	15187	70
11·5		3·9765801	392947	377		1·635293	15256	69
11·6	10372·292$_5$	4·0158748	393319	372		1·650549	15325	69
11·7		4·0552067	393683	364	46·331$_2$	1·665874	15392	67
11·8	12432·968$_9$	4·0945750	394042	359		1·681266	15459	67
11·9		4·1339792	394396	354		1·696725	15525	66
12·0	14907·980$_2$	4·1734188	394745	349	51·552$_5$	1·712250	15591	66
12·1		4·2128933	395089	344		1·727841	15656	65
12·2	17881·428$_5$	4·2524022	395427	338		1·743497	15721	65
12·3		4·2919449	395759	332	57·440$_5$	1·759218	15786	65
12·4	21454·619$_3$	4·3315208	396087	328		1·775004	15850	64
12·5		4·3711295	396410	323		1·790854	15913	63
12·6	25749·601$_2$	4·4107705	396728	318	64·086$_5$	1·806767	15974	61
12·7		4·4504433	397041	313		1·822741	16036	62
12·8	30913·441$_0$	4·4901474	397349	308		1·838777	16097	61
12·9		4·5298823	397653	304	71·593$_4$	1·854873	16157	60
13·0	37123·381$_5$	4·5696476	397952	299		1·871030	16218	61
13·1		4·6094428	398246	294		1.887248	16277	59
13·2	44593·069$_6$	4·6492674	398536	290	80·080$_1$	1·903525	16335	58
13·3		4·6891210	398823	287		1·919860	16392	57
13·4	53580·078$_4$	4·7290033	399105	282		1·936252	16449	57
13·5		4·7689138	399382	277	89·681$_1$	1·952701	16505	56
13·6	64394·986$_4$	4·8088520	399656	274		1·969206	16561	56
13·7		4·8488176	399926	270		1·985767	16615	54
13·8	77412·345$_2$	4·8888102	400192	266	100·550$_1$	2·002382	16669	54
13·9		4·9288294	4004531	2611		2·019051	16723	54
14·0	93083·92$_8$	4·96887471	4007114	2583		2·035774	16777	54
14·1		5·00894585	4009660	2546	112·862$_9$	2·052551	16829	52
14·2	111954·72$_9$	5·04904245	4012168	2508		2·069380	16880	51
14·3		5·08916413	4014641	2473		2·086260	16930	50
14·4	134682·30$_2$	5·12931054	4017079	2438	126·820$_7$	2·103190	16980	50
14·5		5·16948133	4019483	2404		2·120170	17030	50
14·6	162060·12$_0$	5·20967616	4021854	2371		2·137200	17079	49
14·7		5·24989470	4024191	2337	142·652$_3$	2·154279	17127	48
14·8	195045·80$_2$	5·29013661	4026497	2306		2·171406	17174	47
14·9		5·33040158	4028770	2273		2·188580	17220	46
15·0	234795·23$_2$	5·37068928		2242	160·620$_2$	2·205800		46

Tab. III. Fortsættelse.

x	$P(e^x)$	$\log P(e^x)$	Δ'	Δ''	$Li(e^x)-P(e^x)$	$\log(Li(e^x)-P(e^x))$	Δ'	Δ''
15·0	234795·232	5·37068928	4031012	2242	160·6202	2·205800	17266	46
15·1		5·41099940	4033225	2213		2·223066	17312	46
15.2	282703·800	5·45133165	4035407	2182		2·240378	17356	44
15·3		5·49168572	4037559	2152	181·0230	2·257734	17401	45
15·4	340456·247	5·53206131	4039683	2124		2·275135	17444	43
15·5		5·57245814	4041778	2095		2·292579	17487	43
15·6	410086·924	5·61287592	4043846	2068	204·2049	2·310066	17530	43
15·7		5·65331438	4045886	2040		2·327596	17571	41
15·8	494052·663	5·69377324	4047900	2014		2·345167	17611	40
15·9		5·73425224	40498873	19873	230·5568	2·362778	17652	41
16·0	595320·878	5·774751113	40518484	19611		2·380430	17692	40
16·1		5·815269597	40537843	19359		2·398122	17730	38
16·2	717476·102	5·855807440	40556953	19110	260·5267	2·415852	17769	39
16·3		5·896364393	40575819	18866		2·433621	17808	39
16·4	864848·851	5·936940212	40594445	18626		2·451429	17845	37
16·5		5·977534657	40612835	18390	294·6283	2·469274	17882	37
16·6	1042671·475	6·018147492	40630993	18158		2·487156	17919	37
16·7		6·058778485	40648922	17929		2·505075	17954	35
16·8	1257266·682	6·099427407	40666628	17706	333·4484	2·523029	17990	36
16·9		6·140094035	40684116	17488		2·541019	18024	34
17·0	1516275·615	6·180778151	40701386	17270		2·559043	18057	33
17·1		6·221479537	40718445	17059	377·6588	2·577100	18091	34
17·2	1828933·784	6·262197982	40735295	16850		2·595191	18125	34
17·3		6·302933277	40751941	16646		2·613316	18158	33
17·4	2206404·926	6·343685218	40768385	16444	428·0299	2·631474	18190	32
17·5		6·384453603	40784632	16247		2·649664	18222	32
17·6	2662185·019	6·425238235	40800684	16052		2·667886	18252	30
17·7		6·466038919	40816545	15861	485·4427	2·686138	18283	31
17·8	3212591·190	6·506855464	40832218	15673		2·704421	18313	30
17·9		6·547687682	40847707	15489		2·722734	18344	31
18·0	3877353·424	6·588535389	40863014	15307	550·9069	2·741078	18373	29
18·1		6·629398403	40878143	15129		2·759451	18402	29
18·2	4680330·758	6·670276546	40893095	14952		2·777853	18430	28
18·3		6·711169641	40907877	14782	625·5795	2·796283	18458	28
18·4	5650378·209	6·752077518	40922488	14611		2·814741	18486	28
18·5		6·793000006	40936932	14444		2·833227	18512	26
18·6	6822396·221	6·833936938	40951212	14280	710·7865	2·851739	18539	27
18·7		6·874888150	40965331	14119		2·870278	18566	27
18·8	8238601·202	6·915853481	40979291	13960		2·888844	18593	27
18·9		6·956832772	40993094	13803	808·0476	2·907437	18618	25
19·0	9950063·809	6·997825866	41006744	13650		2·926055	18642	24
19·1		7·038832610	41020244	13500		2·944697	18668	26
19·2	12018571·567	7·079852854	41033594	13350	919·1047	2·963365	18692	24
19·3		7·120886448	41046797	13203		2·982057	18716	24
19·4	14518884·326	7·161933245	41059857	13060		3·000773	18740	24
19·5		7·202993102	41072776	12919	1045·9561	3·019513	18764	24
19·6	17541465·676	7·244065878	41085554	12778		3·038277	18787	23
19·7		7·285151432	41098196	12642		3·057064	18809	22
19·8	21195790·957	7·326249628	41110702	12506	1190·8930	3·075873	18831	22
19·9		7·367360330	41123074	12372		3·094704	18854	23
20·0	25614353·817	7·408483404				3·113558	18875	21
					1356·5425	3·132433		

Tab. IV. **Antallet af Primtal i hvert Hundrede fra 1 til 10000 og i hvert Tusinde fra 1 til 100000, tilligemed tilsvarende Værdier af θ.**

x	Diff.	$\theta(100x)$	Diff.	$\theta(1000x)$	x	Diff.	$\theta(100x)$	Diff.	$\theta(1000x)$
0	25	0	168	0	50	12	669	89	5133
1	21	25	135	168	51	11	681	97	5222
2	16	46	127	303	52	10	692	89	5319
3	16	62	120	430	53	10	702	92	5408
4	17	78	119	550	54	13	712	90	5500
5	14	95	114	669	55	13	725	93	5590
6	16	109	117	783	56	12	738	99	5683
7	14	125	107	900	57	10	750	91	5782
8	15	139	110	1007	58	16	760	90	5873
9	14	154	112	1117	59	7	776	94	5963
10	16	168	106	1229	60	12	783	88	6057
11	12	184	103	1335	61	11	795	87	6145
12	15	196	109	1438	62	13	806	88	6232
13	11	211	105	1547	63	15	819	93	6320
14	17	222	102	1652	64	8	834	80	6413
15	12	239	108	1754	65	11	842	98	6493
16	15	251	98	1862	66	10	853	84	6591
17	12	266	104	1960	67	12	863	99	6675
18	12	278	94	2064	68	12	875	80	6774
19	13	290	104	2158	69	13	887	81	6854
20	14	303	98	2262	70	9	900	98	6935
21	10	317	104	2360	71	10	909	95	7033
22	15	327	100	2464	72	11	919	90	7128
23	15	342	104	2564	73	9	930	83	7218
24	10	357	94	2668	74	11	939	92	7301
25	11	367	98	2762	75	15	950	91	7393
26	15	378	101	2860	76	12	965	83	7484
27	14	393	94	2961	77	10	977	95	7567
28	12	407	98	3055	78	10	987	84	7662
29	11	419	92	3153	79	10	997	91	7746
30	12	430	95	3245	80	11	1007	88	7837
31	10	442	92	3340	81	10	1018	92	7925
32	11	452	106	3432	82	14	1028	89	8017
33	15	463	100	3538	83	9	1042	84	8106
34	11	478	94	3638	84	8	1051	87	8190
35	14	489	92	3732	85	12	1059	85	8277
36	13	503	99	3824	86	13	1071	88	8362
37	12	516	94	3923	87	11	1084	93	8450
38	11	528	90	4017	88	13	1095	76	8543
39	11	539	96	4107	89	9	1108	94	8619
40	15	550	88	4203	90	11	1117	89	8713
41	9	565	101	4291	91	12	1128	85	8802
42	16	574	102	4392	92	11	1140	97	8887
43	9	590	85	4494	93	11	1151	86	8984
44	11	599	96	4579	94	15	1162	87	9070
45	12	610	86	4675	95	7	1177	95	9157
46	12	622	90	4761	96	13	1184	84	9252
47	12	634	95	4851	97	11	1197	82	9336
48	8	646	89	4946	98	12	1208	87	9418
49	15	654	98	5035	99	9	1220	87	9505
50		669		5133	100		1229		9592

Tab. V. **Antallet af Primtal i hvert af de første 90 Hundredetusinder, tilligemed tilsvarende Værdier af θ.**

x	Diff.	$\theta(10^5 . x)$	$P - \theta$
0	9592	0	
1	8392	9592	− 6
2	8013	17984	− 3
3	7863	25997	+26
4	7678	33860	− 9
5	7560	41538	− 9
6	7445	49098	− 8
7	7408	56543	+13
8	7323	63951	− 7
9	7224	71274	− 9
10	7216	78498	+29
11	7225	85714	+22
12	7081	92939	−41
13	7103	100020	− 2
14	7028	107123	−24
15	6973	114151	− 6
16	7015	121124	+34
17	6932	128139	+ 1
18	6957	135071	+23
19	6903	142028	− 7
20	6874	148931	− 9
21	6857	155805	− 4
22	6849	162662	− 6
23	6791	169511	−20
24	6770	176302	+ 4
25	6809	183072	+29
26	6765	189881	− 4
27	6716	196646	−10
28	6746	203362	+17
29	6708	210108	− 3
30	6676	216816	− 1
31	6717	223492	+19
32	6691	230209	−17
33	6639	236900	−41
34	6611	243539	−26
35	6575	250150	+ 4
36	6671	256725	+58
37	6590	263396	+ 3
38	6624	269986	+17
39	6535	276610	−14
40	6628	283145	+33
41	6540	289773	−24
42	6510	296313	− 3
43	6511	302823	+37
44	6613	309334	+67
45	6493	315947	−16
46	6523	322440	+13
47	6475	328963	+ 2
48	6554	335438	+30
49	6522	341992	−30
50		348514	−66

x	Diff.	$\theta(10^5 . x)$	$P - \theta$
50	6458	348514	
51	6436	354972	− 47
52	6493	361408	− 14
53	6462	367901	− 46
54	6438	374363	− 55
55	6402	380801	− 47
56	6404	387203	− 11
57	6387	393607	+ 16
58	6436	399994	+ 52
59	6420	406430	+ 32
60	6397	412850	+ 22
61	6402	419247	+ 27
62	6425	425649	+ 21
63	6337	432074	− 15
64	6347	438411	+ 31
65	6402	444758	+ 60
66	6338	451160	+ 29
67	6375	457498	+ 55
68	6411	463873	+ 38
69	6365	470284	− 21
70	6369	476649	− 40
71	6306	483018	− 69
72	6348	489324	− 40
73	6299	495672	− 59
74	6301	501971	− 34
75	6305	508272	− 16
76	6347	514577	− 8
77	6245	520924	− 47
78	6364	527169	+ 10
79	6274	533533	− 56
80	6250	539807	− 37
81	6301	546057	0
82	6283	552358	− 18
83	6285	558641	− 23
84	6245	564926	− 35
85	6326	571171	− 11
86	6281	577497	− 73
87	6299	583778	− 95
88	6220	590077	−139
89	6270	596297	−108
90		602567	−132
100		664579	+ 87
1000		5761460	+ 90

Tab. VI. **Sammenligning mellem Værdierne af θ og $\boldsymbol{P}$ for Tal op til e^{15}.**

x	e^x	$\theta(e^x)$	$P(e^x)$	$D = \theta - P - 1$	D^2	$\sqrt{\frac{1}{10}\Sigma D^2}$
0·1	1·1	0	0·1	—1·1	1·21	
0·2	1·2	0	0·1	—1·1	1·21	
0·3	1·3	0	0·2	—1·2	1·44	
0·4	1·5	0	0·3	—1·3	1·69	
0·5	1·6	0	0·4	—1·4	1·96	± 1·1
0·6	1·8	0	0·5	—1·5	2·25	
0·7	2·01	1	0·5	—0·5	·25	
0·8	2·2	1	0·7	—0·7	·49	
0·9	2·5	1	0·8	—0·8	·64	
1·0	2·7	1	0·9	—0·9	·81	
1·1	3·004	2	1·0	0·0	·00	
1.2	3·3	2	1·1	—0·1	·01	
1·3	3·7	2	1·3	—0·3	·09	
1·4	4·1	2	1·4	—0·4	·16	
1·5	4·5	2	1·6	—0·6	·36	± 0·4
1·6	4·95	2	1·8	—0·8	·64	
1·7	5·5	3	2·0	0·0	·00	
1·8	6·0	3	2·2	—0·2	·04	
1·9	6·7	3	2·4	—0·4	·16	
2·0	7·4	4	2·7	—0·3	·09	
2·1	8·2	4	3·0	0·0	·00	
2·2	9·0	4	3·2	—0·2	·04	
2·3	10·0	4	3·6	—0·6	·36	
2·4	11·02	5	3·9	0·1	·01	
2·5	12·2	5	4·2	—0·2	·04	± 0·3
2·6	13·5	6	4·6	0·4	·16	
2·7	14·9	6	5·1	—0·1	·01	
2·8	16·4	6	5·5	—0·5	·25	
2·9	18·2	7	6·0	0·0	·00	
3·0	20·1	8	6·6	0·4	·16	
3·1	22·2	8	7·1	—0·1	·01	
3·2	24·5	9	7·8	0·2	·04	
3·3	27·1	9	8·4	—0·4	·16	
3·4	30·0	10	9·2	—0·2	·04	
3·5	33·1	11	10·0	0·0	·00	± 0·4
3·6	36·6	11	10·8	—0·8	·64	
3·7	40·4	12	11·7	—0·7	·49	
3·8	44·7	14	12·7	0·3	·09	
3·9	49·4	15	13·8	0·2	·04	
4·0	54·6	16	15·0	0·0	·00	
4·1	60·3	17	16·3	—0·3	·09	
4·2	66·7	18	17·7	—0·7	·49	
4·3	73·7	21	19·2	0·8	·64	
4·4	81·5	22	20·8	0·2	·04	
4·5	90·0	24	22·6	0·4	·16	± 0·7
4·6	99·5	25	24·6	—0·6	·36	
4·7	110·0	29	26·7	1·3	1·69	
4·8	121·5	30	28·9	0·1	·01	
4·9	134·3	32	31·4	—0·4	·16	
5·0	148·4	34	34·1	—1·1	1·21	

Tab. VI. Fortsættelse.

x	e^x	$\theta(e^x)$	$P(e^x)$	$D = \theta - P - 1$	D^2	$\sqrt{\frac{1}{10}\Sigma D^2}$
5·1	164·0	38	37·0	0·0	·00	
5·2	181·3	42	40·2	0·8	·64	
5·3	200·3	46	43·7	1·3	1·69	
5·4	221·4	47	47·4	—1·4	1·96	
5·5	244·7	53	51·5	0·5	·25	
5·6	270·4	57	55·9	0·1	·01	± 0·8
5·7	298·9	62	60·8	0·2	·04	
5·8	330·3	66	66·0	—1·0	1·00	
5·9	365·0	72	71·8	—0·8	·64	
6·0	403·4	79	78·0	0·0	·00	
6·1	445·9	86	84·8	0·2	·04	
6·2	492·7	94	92·2	0·8	·64	
6·3	544·6	100	100·2	—1·2	1·44	
6·4	601·8	110	109·0	0·0	·00	
6·5	665·1	121	118·6	1·4	1·96	
6·6	735·1	130	129·0	0·0	·00	± 0·7
6·7	812·4	141	140·4	—0·4	·16	
6·8	897·8	154	152·8	0·2	·04	
6·9	992·3	167	166·3	—0·3	·09	
7·0	1096·6	183	181·0	1·0	1·00	
7·1	1212·0	197	197·0	—1·0	1·00	
7·2	1339·4	217	214·6	1·4	1·96	
7·3	1480·3	233	233·7	—1·7	2·89	
7·4	1636·0	258	254·5	2·5	6·25	
7·5	1808·0	279	277·3	0·7	·49	± 1·4
7·6	1998·2	302	302·1	—1·1	1·21	
7·7	2208·3	329	329·2	—1·2	1·44	
7·8	2440·6	361	358·8	1·2	1·44	
7·9	2697·3	392	391·1	—0·1	·01	
8·0	2981·0	429	426·4	1·6	2·56	
8·1	3294·5	462	464·9	—3·9	15·21	
8·2	3640·9	509	507·0	1·0	1·00	
8·3	4023·9	556	552·9	2·1	4·41	
8·4	4447·1	604	603·1	—0·1	·01	
8·5	4914·8	656	658·0	—3·0	9·00	± 1·9
8·6	5431·7	717	718·0	—2·0	4·00	
8·7	6002·9	783	783·5	—1·5	2·25	
8·8	6634·2	855	855·1	—1·1	1·21	
8·9	7332·0	934	933·4	—0·4	·16	
9·0	8103·1	1019	1019·0	—1·0	1·00	
9·1	8955·3	1113	1112·5	—0·5	·25	
9·2	9897·1	1220	1214·8	4·2	17·64	
9·3	10938·0	1328	1326·7	0·3	·09	
9·4	12088·4	1446	1449·1	—4·1	16·81	
9·5	13359·7	1585	1582·9	1·1	1·21	± 2·5
9·6	14764·8	1729	1729·3	—1·3	1·69	
9·7	16317·6	1892	1889·4	1·6	2·56	
9·8	18033·7	2065	2064·7	—0·7	·49	
9·9	19930·4	2253	2256·4	—4·4	19·36	
10·0	22026·5	2466	2466·2	—1·2	1·44	

Tab. VI. **Fortsættelse.**

x	e^x	$\theta(e^x)$	$P(e^x)$	$D = \theta - P - 1$	D^2	$\sqrt{\frac{1}{10}\Sigma D^2}$
10·1	24343·0	2703	2695·9	6·1	37·21	
10·2	26903·2	2952	2947·2	3·8	14·44	
10·3	29732·6	3223	3222·3	— 0·3	·09	
10·4	32859·6	3523	3523·4	— 1·4	1·96	
10·5	36315·5	3854	3853·1	— 0·1	·01	
10·6	40134·8	4216	4214·0	1·0	1·00	± 4·8
10·7	44355·9	4612	4609·2	2·8	7·84	
10·8	49020·8	5038	5042·0	— 5·0	25·00	
10·9	54176·4	5515	5516·0	— 2·0	4·00	
11·0	59874·1	6048	6035·1	+11·9	141·61	
11·1	66171·2	6605	6603·7	0·3	·09	
11·2	73130·4	7230	7226·4	2·6	6·76	
11·3	80821·6	7911	7908·7	1·3	1·69	
11·4	89321·7	8650	8656·1	— 7·1	50·41	
11·5	98715·8	9476	9475·1	— 0·1	·01	± 4·3
11·6	109097·8	10372	10372·3	— 1·3	1·69	
11·7	120571·7	11346	11355·5	—10·5	110·25	
11·8	133252·4	12434	12433·0	0·0	·00	
11·9	147266·6	13613	13613·8	— 1·8	3·24	
12·0	162754·8	14912	14908·0	3·0	9·00	
12·1	179871·9	16327	16326·5	— 0·5	·25	
12·2	198789·2	17885	17881·4	2·6	6·76	
12·3	219696·0	19585	19586·0	— 2·0	4·00	
12·4	242801·6	21455	21454·6	— 0·6	·36	
12·5	268337·3	23511	23503·3	6·7	44·89	± 8·5
12·6	296558·6	25733	25749·6	—17·6	309·76	
12·7	327747·9	28228	28212·6	14·4	207·36	
12·8	362217·4	30922	30913·4	7·6	57·76	
12·9	400312·2	33885	33875·2	8·8	77·44	
13·0	442413·4	37128	37123·4	3·6	12·96	
13·1	488942·4	40684	40685·8	— 2·8	7·84	
13·2	540364·9	44598	44593·1	3·9	15·21	
13·3	597195·6	48890	48878·8	10·2	104·04	
13·4	660003·2	53565	53580·1	—16·1	259·21	
13·5	729416·4	58742	58737·3	3·7	13·69	±17·2
13·6	806129·8	64411	64395·0	15·0	225·00	
13·7	890911·2	70615	70602·1	11·9	141·61	
13·8	984609·1	77395	77412·3	—18·3	334·89	
13·9	1088161·4	84858	84884·7	—27·7	767·29	
14·0	1202604·3	93118	93083·9	33·1	1095·61	
14·1	1329083·3	102083	102081·2	0·8	·64	
14·2	1468864·2	111957	111954·7	1·3	1·69	
14·3	1623346·0	122773	122790·3	—18·3	334·89	
14·4	1794074·8	134651	134682·3	—32·3	1043·29	
14·5	1982759·3	147727	147734·3	— 8·3	68·89	±25·4
14·6	2191287·9	162089	162060·1	27·9	778·41	
14·7	2421747·6	177773	177784·8	—12·8	163·84	
14·8	2676445·1	195041	195045·8	— 5·8	33·64	
14·9	2957929·2	213971	213994·0	—24·0	576·00	
15·0	3269017·4	234855	234795·2	58·8	3457·44	

Tab. VII. **Værdier af Funktionen $\psi(n)$ og andre numeriske Funktioner.**

n	Faktorer	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_{1}^{n} \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_{2}^{n} E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
1	—	0	1	1·0000 0000	0	0	0·0000 0000	1
2	—	1	—1	0·5000 0000	1	1	0·6931 4718	2
3	—	2	—1	·1666 6667	1	2	1·7917 5947	3
4	2^2		0		2	4	2·4849 0665	4
5	—	3	—1	— ·0333 3333	1	5	4·0943 4456	5
6	2 . 3		1	·1333 3333	3	8		6
7	—	4	—1	— ·0095 2381	1	9	6·0402 5471	7
8	2^3		0		3	12	6·7334 0189	8
9	3^2		0		2	14	7·8320 1418	9
10	2 . 5		1	·0904 7619	3	17		10
11	—	5	—1	— ·0004 3290	1	18	10·2299 0945	11
12	2^2 . 3		0		5	23		12
13	—	6	—1	— ·0773 5598	1	24	12·7948 5881	13
14	2 . 7		1	— ·0059 2741	3	27		14
15	3 . 5		1	·0607 3926	3	30		15
16	2^4		0		4	34	13·4880 0599	16
17	—	7	—1	·0019 1573	1	35	16·3212 1933	17
18	2 . 3^2		0		5	40		18
19	—	8	—1	— ·0507 1585	1	41	19·2656 5831	19
20	2^2 . 5		0		5	46		20
21	3 . 7		1	— ·0030 9680	3	49		21
22	2 . 11		1	·0423 7575	3	52		22
23	—	9	—1	— ·0011 2052	1	53	22·4011 5253	23
24	2^3 . 3		0		7	60		24
25	5^2		0		2	62	24·0105 9044	25
26	2 . 13		1	·0373 4102	3	65		26
27	3^3		0		3	68	25·1092 0273	27
28	2^2 . 7		0		5	73		28
29	—	10	—1	·0028 5826	1	74	28·4764 9856	29
30	2 . 3 . 5		—1	— ·0304 7507	7	81		30
31	—	11	—1	— ·0627 3314	1	82	31·9104 8576	31
32	2^5		0		5	87	32·6036 3294	32
33	3 . 11		1	— ·0324 3011	3	90		33
34	2 . 17		1	— ·0030 1834	3	93		34
35	5 . 7		1	·0255 5309	3	96		35
36	2^2 . 3^2		0		8	104		36
37	—	12	—1	— ·0014 7394	1	105	36·2145 5085	37
38	2 . 19		1	·0248 4185	3	108		38
39	3 . 13		1	·0504 8288	3	111		39
40	2^3 . 5		0		7	118		40
41	—	13	—1	·0260 9263	1	119	39·9281 2292	41
42	2 . 3 . 7		—1	·0022 8311	7	126		42
43	—	14	—1	— ·0209 7271	1	127	43·6893 2304	43
44	2^2 . 11		0		5	132		44
45	3^2 . 5		0		5	137		45
46	2 . 23		1	·0007 6643	3	140		46
47	—	15	—1	— ·0205 1018	1	141	47·5394 7064	47
48	2^4 . 3		0		9	150		48
49	7^2		0		2	152	49·4853 8079	49
50	2 . 5^2		0		5	157		50

Tab. VII.

Fortsættelse.

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_2^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
51	3 . 17		1	—0·0009 0233	3	160		51
52	2^2 . 13		0		5	165		52
53	—	16	—1	— ·0197 7026	1	166	53·4556 7270	53
54	2 . 3^3		0		7	173		54
55	5 . 11		1	— ·0015 8844	3	176		55
56	2^3 . 7		0		7	183		56
57	3 . 19		1	·0159 5542	3	186		57
58	2 . 29		1	·0331 9680	3	189		58
59	—	17	—1	·0162 4765	1	190	57·5332 1014	59
60	2^2 . 3 . 5		0		11	201		60
61	—	18	—1	— ·0001 4580	1	202	61·6440 8400	61
62	2 . 31		1	·0159 8324	3	205		62
63	3^2 . 7		0		5	210		63
64	2^6		0		6	216	62·3372 3118	64
65	5 . 13		1	·0313 6785	3	219		65
66	2 . 3 . 11		—1	·0162 1634	7	226		66
67	—	19	—1	·0012 9096	1	227	66·5419 2380	67
68	2^2 . 17		0		5	232		68
69	3 . 23		1	·0157 8372	3	235		69
70	2 . 5 . 7		—1	·0014 9800	7	242		70
71	—	20	—1	— ·0125 8650	1	243	70·8046 0368	71
72	2^3 . 3^2		0		11	254		72
73	—	21	—1	— ·0262 8513	1	255	75·0950 6312	73
74	2 . 37		1	— ·0127 7162	3	258		74
75	3 . 5^2		0		5	263		75
76	2^2 . 19		0		5	268		76
77	7 . 11		1	·0002 1539	3	271		77
78	2 . 3 . 13		—1	— ·0126 0512	7	278		78
79	—	22	—1	— ·0252 6335	1	279	79·4645 1097	79
80	2^4 . 5		0		9	288		80
81	3^4		0		4	292	80·5631 2326	81
82	2 . 41		1	— ·0130 6823	3	295		82
83	—	23	—1	— ·0251 1642	1	296	84·9819 6387	83
84	2^2 . 3 . 7		0		11	307		84
85	5 . 17		1	— ·0133 5171	3	310		85
83	2 . 43		1	— ·0017 2381	3	313		86
87	3 . 29		1	0097 7045	3	316		87
88	2^3 . 11		0		7	323		88
89	—	24	—1	— ·0014 6551	1	324	89·4706 0024	89
90	2 . 3^2 . 5		0		11	335		90
91	7 . 13		1	·0095 2350	3	338		91
92	2^2 . 23		0		5	343		92
93	3 . 31		1	·0202 7619	3	346		93
94	2 . 47		1	·0309 1449	3	349		94
95	5 . 19		1	·0414 4081	3	352		95
96	2^5 . 3		0		11	363		96
97	—	25	—1	·0311 3153	1	364	94·0453 1122	97
98	2 . 7^2		0		5	369		98
99	3^2 . 11		0		5	374		99
100	2^2 . 5^2		0		8	382		100

Tab. VII. **Fortsættelse.**

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum\limits_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum\limits_2^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
101	—	26	−1	0·0212 3054	1	383	98·6604 3174	101
102	2 . 3 . 17		−1	·0114 2662	7	390		102
103	—	27	−1	·0017 1788	1	391	103·2951 6073	103
104	2^3 . 13		0		7	398		104
105	3 . 5 . 7		−1	— ·0078 0583	7	405		105
106	2 . 53		1	·0016 2803	3	408		106
107	—	28	−1	— ·0077 1777	1	409	107·9679 8956	107
108	$2^2 . 3^3$		0		11	420		108
109	—	29	−1	— ·0167 9208	1	421	112·6593 3744	109
110	2 . 5 . 11		−1	— ·0259 8299	7	428		110
111	3 . 37		1	— ·0169 7398	3	431		111
112	2^4 . 7		0		9	440		112
113	—	30	−1	— ·0258 2354	1	441	117·3867 2526	113
114	2 . 3 . 19		−1	— ·0345 9546	7	448		114
115	5 . 23		1	— ·0258 9981	3	451		115
116	2^2 . 29		0		5	456		116
117	3^2 . 13		0		5	461		117
118	2 . 59		1	— ·0174 2524	3	464		118
119	7 . 17		1	— ·0090 2288	3	467		119
120	2^3 . 3 . 5		0		15	482		120
121	11^2		0		2	484	119·7846 2053	121
122	2 . 61		1	— ·0008 2516	3	487		122
123	3 . 41		1	·0073 0493	3	490		123
124	2^2 . 31		0		5	495		124
125	5^3		0		3	498	121·3940 5844	125
126	2 . 3^2 . 7		0		11	509		126
127	—	31	−1	— ·0005 6909	1	510	126·2382 4553	127
128	2^7		0		7	517	126·9313 9271	128
129	3 . 43		1	·0071 8285	3	520		129
130	2 . 5 . 13		−1	— ·0005 0946	7	527		130
131	—	32	−1	— ·0081 4305	1	528	131·8065 9003	131
132	2^2 . 3 . 11		0		11	539		132
133	7 . 19		1	— ·0006 2425	3	542		133
134	2 . 67		1	·0068 3844	3	545		134
135	3^2 . 15		0		7	552		135
136	2^3 . 17		0		7	559		136
137	—	33	−1	— ·0004 6083	1	560	136·7265 7096	137
138	2 . 3 . 23		−1	— ·0077 0721	7	567		138
139	—	34	−1	— ·0149 0146	1	568	141·6610 4489	139
140	2^2 . 5 . 7		0		11	579		140
141	3 . 47		1	— ·0078 0926	3	582		141
142	2 . 71		1	— ·0007 6700	3	585		142
143	11 . 13		1	·0062 2600	3	558		143
144	$2^4 \cdot 3^2$		0		14	602		144
145	5 . 29		1	·0131 2256	3	605		145
146	2 . 73		1	·0199 7187	3	608		146
147	3 . 7^2		0		5	613		147
148	2^2 . 37		0		5	618		148
149	—	35	−1	·0132 6046	1	619	146·6649 9120	149
150	2 . 3 . 5^2		0		11	630		150

Tab. VII. Fortsættelse.

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum\limits_{1}^{n}\frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum\limits_{2}^{n} E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
151	—	36	−1	0·0066 3795	1	631	151·6822 7104	151
152	$2^3 . 19$		0		7	638		152
153	$3^2 . 17$		0		5	643		153
154	$2 . 7 . 11$		−1	·0001 4444	7	650		154
155	$5 . 31$		1	·0065 9605	3	653		155
156	$2^2 . 3 . 13$		0		11	664		156
157	—	37	−1	·0002 2663	1	665	156·7385 1685	157
158	$2 . 79$		1	·0065 5574	3	668		158
159	$3 . 53$		1	·0128 4505	3	671		159
160	$2^5 . 5$		0		11	682		160
161	$7 . 23$		1	·0190 5623	3	685		161
162	$2 . 3^4$		0		9	694		162
163	—	38	−1	·0129 2126	1	695	161·8322 6705	163
164	$2^2 . 41$		0		5	700		164
165	$3 . 5 . 11$		−1	·0068 6065	7	707		165
166	$2 . 83$		1	·0128 8475	3	710		166
167	—	39	−1	·0068 9672	1	711	166·9502 6086	167
168	$2^3 . 3 . 7$		0		15	726		168
169	13^2		0		2	728	169·5152 1022	169
170	$2 . 5 . 17$		−1	·0010 1437	7	735		170
171	$3^2 . 19$		0		5	740		171
172	$2^2 . 43$		0		5	745		172
173	—	40	−1	— ·0047 6598	1	746	174·6685 0181	173
174	$2 . 3 . 29$		−1	— ·0105 1310	7	753		174
175	$5^2 . 7$		0		5	758		175
176	$2^4 . 11$		0		9	767		176
177	$3 . 59$		1	— ·0048 6338	3	770		177
178	$2 . 79$		1	·0007 5459	3	773		178
179	—	41	−1	— ·0048 3200	1	774	179·8558 8762	179
180	$2^2 . 3^2 . 5$		0		17	791		180
181	—	42	−1	— ·0103 5686	1	792	185·0543 8465	181
182	$2 . 7 . 13$		−1	— ·0158 5137	7	799		182
183	$3 . 61$		1	— ·0103 8688	3	802		193
184	$2^3 . 23$		0		7	809		184
185	$5 . 37$		1	— ·0049 8148	3	812		185
186	$2 . 3 . 31$		−1	— ·0103 5782	7	819		186
187	$11 . 17$		1	— ·0050 1023	3	822		187
188	$2^2 . 47$		0		5	827		188
189	$3^3 . 7$		0		7	834		189
190	$2 . 5 . 19$		−1	— ·0102 7338	7	841		190
191	—	43	−1	— ·0155 0899	1	842	190·3066 5808	191
192	$2^6 . 3$		0		13	855		192
193	—	44	−1	— ·0206 9034	1	856	195·5693 4827	193
194	$2 . 97$		1	— ·0155 3570	3	859		194
195	$3 . 5 . 13$		−1	— ·0206 6390	7	866		195
196	$2^2 . 7^2$		0		8	874		196
197	—	45	−1	— ·0257 4004	1	875	200·8525 5200	197
198	$2 . 3^2 . 11$		0		11	886		198
199	—	46	−1	— ·0307 6517	1	887	206·1458 5682	199
200	$2^3 . 5^2$		0		11	898		200

Tab. VII. **Fortsættelse.**

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_{1}^{n} \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_{2}^{n} E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
201	3 . 67		1	—0·0257 9005	3	901		201
202	2 . 101		1	— ·0208 3955	3	904		202
203	7 . 29		1	— ·0159 1344	3	907		203
204	$2^2 . 3 . 17$		0		11	918		204
205	5 . 41		1	— ·0110 3539	3	921		205
206	2 . 103		1	— ·0061 8103	3	924		206
207	$3^2 . 23$		0		5	929		207
208	$2^4 . 13$		0		9	938		208
209	11 . 19		1	— ·0013 9634	3	941		209
210	2 . 3 . 5 . 7		1	·0033 6557	15	956		210
211	—	47	—1	— ·0013 7377	1	957	211·4977 1495	211
212	$2^2 . 53$		0		5	962		212
213	3 . 71		1	·0033 2107	3	965		213
214	2 . 107		1	·0079 9397	3	968		214
215	5 . 43		1	·0126 4513	3	971		215
216	$2^3 . 3^3$		0		15	986		216
217	7 . 31		1	·0172 5342	3	989		217
218	2 . 109		1	·0218 4058	3	992		218
219	3 . 73		1	·0264 0679	3	995		219
220	$2^2 . 5 . 11$		0		11	1006		220
221	13 . 17		1	·0309 3168	3	1009		221
222	2 . 3 . 37		—1	·0264 2717	7	1016		222
223	—	48	—1	·0219 4287	1	1017	216·9048 8672	223
224	$2^5 . 7$		0		11	1028		224
225	$3^2 . 5^2$		0		8	1036		225
226	2 . 113		1	·0263 6765	3	1039		226
227	—	49	—1	·0219 6236	1	1040	222·3298 3674	227
228	$2^2 . 3 . 19$		0		11	1051		228
229	—	50	—1	·0175 9555	1	1052	227·7635 5874	229
230	2 . 5 . 23		—1	·0132 4772	7	1059		230
231	3 . 7 . 11		—1	·0089 1872	7	1066		231
232	$2^3 . 29$		0		7	1073		232
233	—	51	—1	·0046 2687	1	1074	233·2145 9719	233
234	$2 . 3^2 . 13$		0		11	1085		234
235	5 . 47		1	·0088 8219	3	1088		235
236	$2^2 . 59$		0		5	1093		236
237	3 . 79		1	·0131 0160	3	1096		237
238	2 . 7 . 17		—1	·0088 9992	7	1103		238
239	—	52	—1	·0047 1582	1	1104	238·6910 6074	239
240	$2^4 . 3 . 5$		0		19	1123		240
241	—	53	—1	·0005 6644	1	1124	244·1758 5767	241
242	$2 . 11^2$		0		5	1129		242
243	3^4		0		5	1134	245·2744 6996	243
244	$2^2 . 61$		0		5	1139		244
245	$5 . 7^2$		0		5	1144		255
246	2 . 3 . 41		—1	— ·0034 9860	7	1151		246
247	13 . 19		1	·0005 4998	3	1154		247
248	$2^3 . 31$		0		7	1161		248
249	3 . 83		1	·0045 6605	3	1164		249
250	$2 . 5^3$		0		7	1171		250

Tab. VII. **Fortsættelse.**

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum\limits_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum\limits_1^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
251	—	54	—1	0·0005 8198	1	1172	250·7999 2290	251
252	$2^2 . 3^2 . 7$		0		17	1189		252
253	$11 . 23$		1	·0045 3455	3	1192		253
254	$2 . 127$		1	·0084 7156	3	1195		254
255	$3 . 5 . 17$		—1	·0045 4999	7	1202		255
256	2^8		0		8	1210	251·4930 7008	256
257	—	55	—1	·0006 5894	1	1211	257·0421 4616	257
258	$2 . 3 . 43$		—1	— ·0032 1703	7	1218		258
259	$7 . 37$		1	·0006 4398	3	1221		259
260	$2^2 . 5 . 13$		0		11	1232		260
261	$3^2 . 29$		0		5	1237		261
262	$2 . 131$		1	·0044 6077	3	1240		262
263	—	56	—1	·0006 5849	1	1241	262·6143 0019	263
264	$2^3 . 3 . 11$		0		15	1256		264
265	$5 . 53$		1	·0044 3207	3	1259		265
266	$2 . 7 . 19$		—1	·0006 7268	7	1266		266
267	$3 . 89$		1	·0044 1799	3	1269		267
268	$2^2 . 67$		0		5	1274		268
269	—	57	—1	·0007 0052	1	1275	268·2090 1157	269
270	$2 . 3^3 . 5$		0		15	1290		270
271	—	58	—1	— ·0029 8952	1	1291	273·8111 3039	271
272	$2^4 . 17$		0		9	1300		272
273	$3 . 7 . 13$		—1	— ·0066 5252	7	1307		273
274	$2 . 137$		1	— ·0030 0288	3	1310		274
275	$5^2 . 11$		0		5	1315		275
276	$2^2 . 3 . 23$		0		11	1326		276
277	—	59	—1	— ·0066 1299	1	1327	279·4351 4790	277
278	$2 . 139$		1	— ·0030 1587	3	1330		278
279	$3^2 . 31$		0		5	1335		279
280	$2^3 . 5 . 7$		0		15	1350		280
281	—	60	—1	— ·0065 7459	1	1351	285·0735 0257	281
282	$2 . 3 . 47$		—1	— ·0101 2069	7	1358		282
283	—	61	—1	— ·0136 5425	1	1359	290·7189 4947	283
284	$2^2 . 71$		0		5	1364		284
285	$3 . 5 . 19$		—1	— ·0171 6303	7	1371		285
286	$2 . 11 . 13$		—1	— ·0206 5953	7	1378		286
287	$7 . 41$		1	— ·0171 7521	3	1381		287
288	$2^5 . 3^2$		0		17	1398		288
289	17^2		0		2	1400	293·5521 6281	289
290	$2 . 5 . 29$		—1	— ·0206 2349	7	1407		290
291	$3 . 97$		1	— ·0171 8706	3	1410		291
292	$2^2 . 73$		0		5	1415		292
293	—	62	—1	— ·0206 0003	1	1416	299·2323 3542	293
294	$2 . 3 . 7^2$		0		11	1427		294
295	$5 . 59$		1	— ·0172 1020	3	1430		295
296	$2^3 . 37$		0		7	1437		296
297	$3^3 . 11$		0		7	1444		297
298	$2 . 149$		1	— ·0138 5449	3	1447		298
299	$13 . 23$		1	— ·0105 1001	3	1450		299
300	$2^2 . 3 . 5^2$		0		17	1467		300

Tab. VII. Fortsættelse.

n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$
307	63	304·9591 8317	599	109	593·9074 3341	911	156	910·8559 0371
311	64	310·6989 7608	601	110	600·3060 2834	919	157	917·6791 8983
313	65	316·4451 7927	607	111	606·7145 5713	929	158	924·5132 9857
317	66	322·2040 8104	613	112	613·1329 2207	937	159	931·3559 8185
331	67	328·0061 9942	617	113	619·5577 9109	941	160	938·2029 2499
337	68	333·8262 8235	619	114	625·9858 9636	947	161	945·0562 2408
343	—	335·7721 9250	625	—	627·5953 3427	953	162	951·9158 3898
347	69	341·6215 1728	631	115	634·0426 4013	961	—	955·3498 2618
349	70	347·4765 8920	641	116	640·5056 6959	967	163	962·2240 2468
353	71	353·3430 5726	643	117	646·9718 1431	971	164	969·1023 5115
359	72	359·2263 7965	647	118	653·4441 6060	977	165	975·9868 3780
361	—	362·1708 1863	653	119	659·9257 3773	983	166	982·8774 4692
367	73	368·0761 8048	659	120	666·4164 6126	991	167	989·7761 6145
373	74	373·9977 5890	661	121	672·9102 1510	997	168	996·6809 1222
379	75	379·9352 9511	673	122	679·4219 6043	1009	169	1003·5976 2724
383	76	385·8833 3010	677	123	685·9396 3170	1013	170	1010·5182 9874
389	77	391·8469 0944	683	124	692·4661 2656	1019	171	1017·4448 7577
397	78	397·8308 4572	691	125	699·0042 6638	1021	172	1024·3734 1359
401	79	403·8248 0715	701	126	705·5567 7427	1024	—	1025·0665 6077
409	80	409·8385 2231	709	127	712·1206 2980	1031	173	1032·0048 4525
419	81	415·8763 9323	719	128	718·6984 9116	1033	174	1038·9450 6772
421	82	421·9190 2606	727	129	725·2874 1764	1039	175	1045·8910 8171
431	83	427·9851 3415	729	—	726·3860 2993	1049	176	1052·8466 7432
433	84	434·0558 7188	733	130	732·9831 7563	1051	177	1059·8041 7169
439	85	440·1403 7129	739	131	739·5884 7355	1061	178	1066·7711 3883
443	86	446·2339 4106	743	132	746·1991 6959	1063	179	1073·7399 8921
449	87	452·3409 6395	751	133	752·8205 7524	1069	180	1080·7144 6812
457	88	458·4656 4734	757	134	759·4499 3849	1087	181	1087·7056 4501
461	89	464·5990 4538	761	135	766·0845 7185	1091	182	1094·7004 9500
463	90	470·7367 7243	769	136	772·7296 6282	1093	183	1101·6971 7649
467	91	476·8831 0169	773	137	779·3799 4187	1097	184	1108·6975 1095
479	92	483·0548 0229	787	138	786·0481 7012	1103	185	1115·7032 9997
487	93	489·2430 6641	797	139	792·7290 2480	1109	186	1122·7145 1396
491	94	495·4395 1054	809	140	799·4248 2372	1117	187	1129·7329 1576
499	95	501·6521 1664	811	141	806·1230 9177	1123	188	1136·7566 7471
503	96	507·8727 0681	821	142	812·8336 1488	1129	189	1143·7857 6227
509	97	514·1051 5483	823	143	819·5465 7108	1151	190	1150·8341 4868
512	—	514·7983 0201	827	144	826·2643 7578	1153	191	1157·8842 7120
521	98	521·0540 5205	829	145	832·9845 9594	1163	192	1164·9430 2935
523	99	527·3136 3351	839	146	839·7168 0665	1171	193	1172·0086 4271
529	—	530·4491 2773	841	—	843·0841 0248	1181	194	1179·0827 5953
541	100	536·7425 4701	853	147	849·8328 6203	1187	195	1186·1619 4392
547	101	543·0469 9581	857	148	856·5862 9995	1193	196	1193·2461 7034
557	102	549·3695 6105	859	149	863·3420 6887	1201	197	1200·3370 8016
563	103	555·7028 4068	863	150	870·1024 8356	1213	198	1207·4379 3207
569	104	562·0467 2111	877	151	876·8789 9055	1217	199	1214·5420 7616
571	105	568·3941 1032	881	152	883·6600 4818	1223	200	1221·6511 3830
577	106	574·7519 5259	883	153	890·4433 7338	1229	201	1228·7650 9441
587	107	581·1269 7741	887	154	897·2312 1836	1231	202	1235·8806 7654
593	108	587·5121 7181	907	155	904·0413 6081	1237	203	1243·0011 2091

Tab. VII. Fortsættelse.

n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$
1249	204	1250·1312 1942	1489	237	1494·6581 6293	1741	271	1749·5337 0398
1259	205	1257·2692 9245	1493	238	1501·9667 0573	1747	272	1756·9993 5929
1277	206	1264·4215 6131	1499	239	1509·2792 5923	1753	273	1764·4684 4317
1279	207	1271·5753 9511	1511	240	1516·5997 8619	1759	274	1771·9409 4391
1283	208	1278·7323 5147	1523	241	1523·9282 2354	1777	275	1779·4236 2574
1289	209	1285·8939 7347	1531	242	1531·2618 9994	1783	276	1786·9096 7836
1291	210	1293·0571 4586	1543	243	1538·6033 8379	1787	277	1794·3979 7188
1297	211	1300·2249 5504	1549	244	1545·9487 4863	1789	278	1801·8873 8396
1301	212	1307·3958 4352	1553	245	1553 2966 9245	1801	279	1809·3834 8131
1303	213	1314·5682 6810	1559	246	1560·6484 9232	1811	280	1816·8851 1577
1307	214	1321·7437 5781	1567	247	1568·0054 1056	1823	281	1824·3933 5454
1319	215	1328·9283 8696	1571	248	1575·3648 7820	1831	282	1831·9059 7208
1321	216	1336·1145 3126	1579	249	1582·7294 2521	1847	283	1839·4272 9006
1327	217	1343·3052 0729	1583	250	1590·0965 0227	1849	—	1843·1884 9018
1331	—	1345·7031 0256	1597	251	1597·4723 8442	1861	284	1850·7173 5944
1361	218	1352·9190 7756	1601	252	1604·8507 6813	1867	285	1858·2494 4758
1367	219	1360·1394 5140	1607	253	1612·2328 9250	1871	286	1865·7836 7591
1369	—	1363·7503 6931	1609	254	1619·6162 6065	1873	287	1873·3189 7261
1373	220	1370·9751 2272	1613	255	1627·0021 1173	1877	288	1880·8564 0265
1381	221	1378·2056 8587	1619	256	1634·3916 7568	1879	289	1888·3948 9765
1399	222	1385·4491 9884	1621	257	1641·7824 7420	1889	290	1895·9387 0052
1409	223	1392·6998 3435	1627	258	1649·1769 6731	1901	291	1903·4888 3586
1423	224	1399·9603 5695	1637	259	1656·5775 8789	1907	292	1911·0421 2247
1427	225	1407·2236 8657	1657	260	1663·9903 5191	1913	293	1918·5985 5044
1429	226	1414·4884 1675	1663	261	1671·4067 3039	1931	294	1926·1643 4372
1433	227	1421·7559 4218	1667	262	1678·8255 1127	1933	295	1933·7311 7220
1439	228	1429·0276 4589	1669	263	1686·2454 9119	1949	296	1941·3062 4390
1447	229	1436·3048 9362	1681	—	1689·9590 6326	1951	297	1948·8823 4124
1451	230	1443·5849 0187	1693	264	1697·3933 2064	1973	298	1956·4696 5175
1453	231	1450·8662 8753	1697	265	1704·8299 3791	1979	299	1964·0599 9870
1459	232	1458·1517 9408	1699	266	1712·2677 3303	1987	300	1971·6543 7994
1471	233	1465·4454 9180	1709	267	1719·7113 9671	1993	301	1979·2517 7626
1481	234	1472·7459 6461	1721	268	1727·1620 5751	1997	302	1986·8511 7759
1483	235	1480·0477 8695	1723	269	1734·6138 7975	1999	303	1994·4515 7992
1487	236	1487·3523 0290	1733	270	1742·0714 8904			

Recherches sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.

Par

J. P. Gram.

Introduction. Etablir, sous une forme analytique, la loi de la distribution des nombres premiers dans la suite naturelle des nombres, est un problème qui, malgré les efforts que les plus grands géomètres ont faits pour le résoudre, attend toujours encore sa solution. Le présent travail n'a pas la prétention d'en donner une; mon but principal, en l'entreprenant, a été de réunir sous un point de vue commun les différentes méthodes qu'on a essayées jusqu'ici, de les pousser aussi loin que possible et, par là, de signaler les difficultés que rencontre, pour le moment, la solution du problème, comme aussi d'indiquer quels sont les meilleurs moyens à employer pour y arriver et les résultats qu'il est permis d'en attendre.

Je commence, dans l'introduction, par donner un aperçu général des moyens dont on dispose pour représenter une fonction discontinue comme celle dont il s'agit ici. La fonction de x qui exprime la totalité des nombres premiers jusqu'à x inclusivement est désignée par $\theta(x)$. Comme caractère général, elle se distingue par un nombre infini de discontinuités dont la position n'est pas connue a priori. Le problème exige que cette fonction soit mise sous une forme telle que sa valeur, pour une valeur donnée de x, puisse être calculée exactement ou, en tout cas, avec une approximation assignable. De là découlent toutes les difficultés qu'il présente. Car parvînt-on, entre certaines limites, à représenter exactement la fonction par des séries trigonométriques finies, cela ne pourrait se faire qu'en y introduisant les nombres premiers eux-mêmes, qui précisément sont à regarder comme inconnus, et il est à supposer qu'il en serait de même si l'on essayait d'employer dans le même but des intégrales définies. Si l'on veut éviter que les nombres premiers entrent explicitement dans la formule, la discontinuité n'y sera plus apparente, et c'est pourquoi, si $\theta(x)$ est exprimée par une intégrale définie, celle-ci ne pourra être transformée que si on la traite avec la plus grande précaution. M. Riemann n'en a pas moins réussi, en représentant $\theta(x)$ par une intégrale définie, à donner une formule exacte de la distribution des nombres premiers; mais cette formule ne permet d'effectuer aucun calcul numérique exact, bien qu'elle se laisse séparer en deux autres, dont une, qui est calculable, est la meilleure formule d'approximation qu'on connaisse jusqu'ici. L'écart entre cette formule d'approximation et la véritable valeur de $\theta(x)$ est en effet représenté par une série périodique infinie dont on ne saurait déterminer la convergence, et qui, en tout cas, varie si fortement qu'on peut dire avec certitude qu'il est impossible de la calculer terme par terme.

On rencontrerait la même difficulté en essayant directement d'exprimer $\theta(x)$ à l'aide d'un des développements en séries infinies qui peuvent être employés pour représenter des fonctions arbitraires. En effet le nombre des discontinuités étant infini, une pareille série serait sans doute très peu convergente, et c'est seulement dans le cas où l'on connaîtrait à l'avance la forme de la fonction à employer qu'il serait possible, par un choix convenable de la forme du développement, de trouver une série dans laquelle un petit nombre de termes donneraient une formule d'approximation dont l'écart d'avec $\theta(x)$ pourrait être apprécié avec certitude.

A côté des moyens ci-dessus mentionnés pour exprimer des fonctions discontinues sous une forme continue, la théorie même des nombres nous fournit dans les quotients incomplets une forme de fonction dont l'emploi est tout indiqué. A l'aide de ces quotients, on peut, en se servant des nombres premiers jusqu'à $\sqrt{x}$, trouver la totalité des nombres premiers compris entre $\sqrt{x}$ et x. Mais, en général, ils ne donnent pas sous une forme analytique des formules d'approximation dont on puisse se servir. Toutefois, comme M. Dirichlet et plus tard MM. Berger, géomètre suédois, et Césaro, géomètre belge, ont, par ce moyen, réussi à donner des formules d'approximation pour la valeur moyenne de certaines fonctions symétriques des diviseurs d'un nombre, il y a lieu de rechercher si l'on pourrait faire quelque chose d'analogue pour les nombres premiers. Cela ne semble cependant être guère possible directement, bien qu'il y ait une connexion visible entre les résultats qu'on peut obtenir par cette voie et la formule de Riemann.

Les nombres premiers eux-mêmes devant être considérés comme inconnus, il faudra, pour traiter le problème à fond, partir de formules où certaines fonctions connues se trouvent combinées avec des fonctions de nombres premiers, et qui renferment ainsi des définitions implicites de ces derniers. Comme le théorême de Wilson ne semble, sous ce rapport, être susceptible d'aucune application, il ne reste que deux de ces formules, dont l'une (2) [1]) est due à Euler et l'autre (131) à M. Tchebycheff.

C'est donc autour de ces formules, comme points principaux, que se groupent les recherches suivantes.

---

§ 1. Fonctions symétriques de tous les nombres premiers. Dans ce qui suit, nous désignons un nombre premier en général par p et une suite de nombres premiers par a, b, c . . . et nous ne rangeons pas le nombre 1 parmi les nombres premiers.

Nous désignons en outre par $s(r)$ ou s_r la somme $\sum_1^\infty n^{-r} = 1^{-r} + 2^{-r} + 3^{-r} + \ldots$

On a ainsi, d'après Euler, la formule:

$$\Pi(1-p^{-r}) = \frac{1}{s(r)}\ , \tag{2}$$

qui sera applicable en tant que mod. $r > 1$. Les formules (3) et (4) qui s'en déduisent sont dans le même cas, et on peut de la même manière déterminer les valeurs de la fonction correspondante $\Pi(1+p^{-r})$. Cette fonction est infinie pour $r = 1$, d'où il suit que

---

[1]) Les numéros des formules sont les mêmes que dans le mémoire danois.

$\Pi(1-p^{-1}) = 0$, tandis qu'il est incertain si la série qu'on obtient en effectuant la multiplication et en ordonnant les termes suivant les valeurs croissantes des dénominateurs est convergente ou non.

Euler a aussi trouvé plusieurs relations analogues, dont l'une, qui a été démontrée par Mertens, peut servir à prouver qu'il y a une infinité de nombres premiers de chacune des formes $4n+1$ et $4n-1$.

Le reste du paragraphe est consacré à des développements concernant la fonction $s(r)$, parmi lesquels nous mentionnerons l'expression trouvée par M. Riemann (15), en nous référant pour les détails à son mémoire original (Monatsber. der Berl. Akad. 1859).

---

§ 2. Quelques séries spéciales. Facteurs de Möbius. Si, dans le produit $\Pi(1-p^{-r})$, on effectue la multiplication et ordonne les termes suivant les valeurs croissantes des dénominateurs, on obtient une série qui peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{1}{s(r)} = \sum_1^\infty \mu(x) . x^{-r} = 1 - 2^{-r} - 3^{-r} - 5^{-r} + 6^{-r} - 7^{-r} + 10^{-r} + \ldots$$

$\mu(x)$ désignant un facteur qui est égal à 1 lorsque x est un produit d'un nombre pair de différents facteurs premiers, à -1 lorsque ce nombre est impair et à 0 lorsque x renferme un facteur divisible par un carré. D'après Möbius, qui, le premier, a fait de ces facteurs l'objet d'une recherche méthodique, nous les appelons facteurs de Möbius. Leur propriété la plus importante est celle qui est exprimée dans la formule (22), à savoir que la somme de tous les μ qui correspondent à tous les diviseurs d'un nombre entier arbitraire est égale à zéro. De là l'emploi qu'on a fait de ces facteurs pour résoudre des systèmes particuliers d'équations. A-t-on en effet, entre deux systèmes de fonctions X_r et Y_r, des relations de la forme:

$$Y_1 = \Sigma X_r , \quad Y_2 = \Sigma X_{2r} , \quad Y_3 = \Sigma X_{3r} \ldots \tag{23}$$

on trouve: $X_1 = \Sigma\mu(r) Y(r)$, $X_2 = \Sigma\mu(2r) Y(2r)$, $X_3 = \Sigma\mu(3r) Y(3r) \ldots$ (24)

naturellement dans l'hypothèse que les séries dont il s'agit, si on les prolonge à l'infini, sont convergentes.

Dans ce qui suit, sont, d'après Möbius, développés plusieurs exemples parmi lesquels nous citerons les importantes formules (28) et (33):

$$\sum_1^\infty \mu(x) \frac{1}{x} = 0 ; \quad \sum_1^\infty \mu(x) \frac{lx}{x} = -1 ,$$

qui néanmoins ne peuvent être regardées comme complètement démontrées, comme on ne peut juger de la convergence des séries dont il s'agit. On voit cependant plus loin (48) que la première, en tout cas, ne peut être divergente, mais est égale à $\frac{1}{n} \pm$ une fraction.

Parmi les autres applications des facteurs de Möbius, nous citerons encore la formule:

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{2} f(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} f(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots \tag{38}$$

qui, par inversion, donne:

$$f(x) = F(x) - \frac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) - \ldots \tag{39}$$

Si $F(x)$ est une fonction qui puisse être développée en une série convergente suivant les puissances croissantes de lx, il en sera de même de $f(x)$, de sorte qu'à:

$$F(x) = alx + b(lx)^2 + c(lx)^3 + \dots \tag{40}$$

correspond:

$$f(x) = \frac{a}{s_2} lx + \frac{b}{s_3}(lx)^2 + \frac{c}{s_4}(lx)^3 + \dots \tag{41}$$

---

§ 3. **Détermination de $\theta(x)$ par des intégrales définies. Formule de Riemann.** Si l'on désigne par $\pi(x)$ une fonction égale à 1 lorsque x est un nombre premier et à 0 lorsque x est un nombre composé, la formule (3) pourra s'écrire:

$$ls(r) = -\sum_1^\infty \pi(x)\, l(1-x^{-r}), \tag{49}$$

ou si $\tilde{\omega}(x)$ désigne une fonction qui est égale à 1 pour $x = p$, à $\frac{1}{2}$ pour $x = p^2$ et, en général, à $\frac{1}{n}$ pour $x = p^n$, mais à 0 lorsque $x = 1$ ou est composé de différents facteurs premiers:

$$ls(r) = \sum_1^\infty \tilde{\omega}(x) x^{-r}. \tag{50}$$

Ces équations renferment donc des définitions des fonctions $\pi(x)$ et $\tilde{\omega}(x)$, lesquelles permettent de les déterminer. C'est ce qu'a fait M. Riemann à l'aide d'intégrales définies. En remplaçant d'abord x^{-r} par $r\int_x^\infty z^{-r-1}\,dz$, l'équation (50) devient:

$$\frac{1}{r} ls(r) = \int_1^\infty f(z)\, z^{-r-1}\,dz. \tag{52}$$

Cette fonction $f(z)$ a une importance particulière. Si l'on désigne par $\vartheta(x)$ la fonction:

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \frac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots \tag{53}$$

somme que nous appellerons «Totalité des puissances des nombres premiers divisées par leurs exposants», parce qu'elle donne, jusqu'à x inclusivement, la totalité des nombres premiers, plus la moitié de leurs carrés, plus le tiers de leurs cubes, etc., on aura:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\vartheta(x-0) + \vartheta(x+0)).$$

En se servant des intégrales de Fourier, M. Riemann détermine $f(x)$ par la formule (54), mais on peut par une autre voie arriver plus directement au même résultat.

En transformant l'intégrale de Laplace (55), on trouve en effet l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k+zi}\,\frac{x^{k+zi}}{p^{n(k+zi)}}\,dz,$$

où la constante k est une grandeur positive et qui, pour $x > 1$, représente une fonction discontinue dont la valeur est 0 pour $p^n > x$, $\frac{1}{2n}$ pour $p^n = x$ et $\frac{1}{n}$ pour $p^n < x$. Si maintenant on remplace successivement dans cette intégrale p par tous les nombres premiers et n

par tous les nombres entiers et fait ensuite la somme, on arrive, en supposant $k > 1$, à représenter $f(x)$ sous la forme:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{k+zi}}{k+zi}\, l.s(k+zi)\, dz. \tag{57}$$

Dans ce qui suit, on a, pour abréger, posé $k+zi = r$.

En employant la même notation, on trouve que l'intégrale de Laplace est un cas particulier de la suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r-\beta}\, dz = \begin{cases} 2\pi x^\beta & \text{pour } x > 1, \\ 0 & \text{pour } x < 1, \end{cases} \tag{58}$$

la partie réelle de r étant plus grande que la partie réelle de la constante β.

Les formules (59) et (60) représentent des formes semblables. On en déduit facilement différentes fonctions analogues à $f(x)$, en remplaçant x par $\frac{x}{n}$ et en prenant la somme des intégrales correspondant à diverses valeurs de n. Les équations (61)—(66) en fournissent des exemples. Soit par ce procédé, soit par l'intégration partielle de (57), comme l'a fait M. Riemann, on obtient la formule:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \left(\frac{1}{r}\, ls(r)\right) dz = -2\pi l x . f(x), \tag{67}$$

qui est celle qu'il est préférable d'employer pour représenter l'expression finale de $f(x)$.

Dans ce qui suit, est exposée la méthode qu'a suivie M. Riemann pour transformer cette intégrale en y introduisant l'expression trouvée par lui pour $\log s(r)$. Nous avons donné ce développement tout au long, parce que M. Genocchi est arrivé à un résultat qui diffère un peu de celui de Riemann, et que le développement lui-même est très concis chez ce dernier.

Riemann se sert pour $ls(r)$ de la formule suivante:

$$ls(r) = \frac{r}{2} l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) + \Sigma_a l\left(1 + \frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{a^2}\right) + l\xi(0). \tag{69}$$

Les grandeurs a sont les racines de l'équation transcendante:

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}\, x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t l x\right) dx = 0,$$

et sont sans doute toutes réelles, la partie imaginaire étant au moins comprise entre les limites $\pm\frac{1}{2}i$; elles se présentent en outre deux à deux avec des signes contraires. Nous nous référons, quant à ce point, au mémoire original de M. Riemann, en remarquant que, bien qu'il ne puisse régner aucun doute sur l'exactitude de son développement, il ne semble cependant pas possible d'arriver par la voie qu'il indique à la connaissance exacte des racines a.

En transformant le terme qui renferme Σ_a, on trouve que cette somme peut être remplacée par:

$$\Sigma_a\left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+ai}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}-ai}\right)\right) - l\xi(0) + l2.$$

Cette transformation montre que le terme constant dans la formule de M. Riemann, $\xi(0)$, disparaît complètement et est remplacé par $l2$, comme l'indique M. Genocchi.

Il reste à introduire dans l'intégrale les termes de la formule de $ls(r)$ et à intégrer terme par terme. Pour faciliter l'intégration, on se sert de l'intégrale $B(x)$ (73), qui a pour valeur:

$$2\pi\, lx \int \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta.$$

Relativement à la détermination des limites de l'intégration, il faut remarquer que cette formule suppose que la partie réelle de $r-\beta$ doit être positive. Cela est facile à obtenir, en ce qui concerne les termes qui proviennent de la fonction Γ, en intégrant de $\beta = -\infty$ à $\beta = -2n$, et tous les termes qui y correspondent seront donc compris dans l'expression:

$$f_3 = \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\, x lx},$$

qui, pour $x > 2$, est toujours $< \frac{1}{7}$.

Le terme qui provient de $l(r-1)$ mérite une attention particulière. Il faut ici déterminer la fonction correspondante $B(x)$ en posant:

$$B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \frac{1}{r}\, l\left(\frac{r}{\beta} - 1\right) dz = 2\pi\, lx \int_g^1 \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta,$$

et avoir soin de choisir la limite inférieure et le contour le long duquel on fait l'intégration de manière que la partie réelle de $r-\beta$ soit toujours positive, et qu'en intégrant le long du même contour on ait:

$$\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, d\beta = l(r-1).$$

On peut y arriver en prenant pour limite inférieure $-\infty$ et pour intégrale la moyenne entre deux intégrales pour lesquelles on intégrera le long d'un contour différent, de manière que l'intégrale singulière provenant du pôle $\beta = 0$ disparaisse. On trouve alors:

$$\frac{B(x)}{2\pi\, lx} = \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta + \int_{+\rho}^{1} \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta, \quad (\text{pour } \rho = 0)$$

expression qui est identique avec le logarithme intégral $Li(x)$ défini par la série (75). Le symbole $[n]$ désigne ici comme plus loin le produit $1.2 \ldots n$. On traite de la même manière les termes qui entrent dans la somme Σ_α et obtient ensuite le résultat final sous la forme:

$$f(x) = Li(x) - \Sigma_\alpha\left(Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\, \frac{dx}{x lx} - l2, \tag{77}$$

qui ne diffère de celle de Riemann que par la constante, laquelle, au lieu de $l\xi(0)$, est $l2$ comme chez Genocchi.

La formule de **Riemann**, et c'est en quoi consiste sa valeur scientifique, donne pour $f(x)$ une expression explicite qui représente cette fonction sous une forme telle, qu'on peut en séparer $Li(x)$ comme une partie continue, tandis que le terme Σ_α a un caractère essentiellement périodique. Mais pour juger de l'influence de ce terme, il faudrait avoir une connaissance plus exacte des racines α, de manière, au moins, à pouvoir indiquer les limites entre lesquelles cette série est comprise. Tant que cette condition ne sera pas remplie, on devra se contenter de montrer l'exactitude de la formule en la comparant avec les quantités des nombres premiers énumérés, ce qui permet de constater que les écarts sont insignifiants dans les limites de ces énumérations. Le rôle prédominant du terme $Li(x)$ est dû à la circonstance que $s(r) = \infty$ pour $r = 1$ et, notamment, que $s(r) = \frac{\rho}{r-1}$, où ρ est une fonction qui converge vers l'unité en même temps que r, ainsi qu'il résulte des recherches de MM. **Dirichlet** et **Tchebycheff**. En effet, la substitution de $\frac{1}{r-1}$ à $s(r)$ dans les formules (63) et (64) donnera des formules d'approximation très satisfaisantes. Quant à calculer exactement $\vartheta(x)$ par la formule de **Riemann**, cela doit être regardé comme impossible même en supposant connues les racines α; tout ce qu'on peut espérer, c'est, dans le cas le plus favorable, de déterminer les limites des écarts d'avec le terme $Li(x)$, limites qui semblent devoir dépendre de $\sqrt{x}$.

Après avoir trouvé une expression pour $\vartheta(x)$, on peut déterminer $\theta(x)$ par inversion de la formule (55) à l'aide des facteurs de **Möbius**. Cette opération peut se faire pour chaque terme dans (77), après quoi on obtiendra la formule correspondante pour

$$\tfrac{1}{2}(\theta(x+0) + \theta(x-0)).$$

En considérant dans $f(x)$ d'abord le terme $Li(x)$, on a:

$$Li(x) = C + llx + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{[2]\,2} + \frac{(lx)^3}{[3]\,3} + \ldots$$

La partie de cette série qui contient les puissances croissantes de lx donne par inversion, d'après (41), la série correspondante:

$$P(x) = \frac{lx}{[1].1s_2} + \frac{(lx)^2}{[2].2s_3} + \frac{(lx)^3}{[3].3s_4} + \ldots \tag{86}$$

et, dans la supposition que les formules (28) et (33) sont exactes, on obtient d'une manière analogue:

$$\Sigma \frac{\mu(m)}{m}\left(C + l\frac{lx}{m}\right) = 1,$$

de sorte que:

$$Li(x) - \frac{1}{2} Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} Li(x^{\frac{1}{3}}) \ldots = 1 + P(x).$$

Le terme $-l2$ dans (77) disparaît par l'inversion, tandis qu'on ne peut déterminer l'influence des deux autres termes. Mais il est permis de supposer qu'ils n'ont pas grande importance, et c'est pourquoi nous adoptons comme résultat définitif de ces recherches l'expression:

$$\theta(x) = P(x) + 1$$

pour formule d'approximation de $\theta(x)$ ou plus exactement de $\frac{1}{2}(\theta(x+0) + \theta(x-0))$.

Mais bien qu'on ne puisse guère mettre en doute la valeur de cette formule, elle ne saurait cependant être regardée comme démontrée tant qu'on ne sera pas parvenu à éclaircir complètement la nature de la série qui renferme les logarithmes intégrals imaginaires, et, en particulier, à déterminer les racines a qui y figurent. Il est vraisemblable qu'elles dépendent d'une manière simple des nombres premiers ou peut-être plutôt de leurs logarithmes.

---

§ 4. Quotients incomplets. Théorêmes de Berger et de Cesáro. Nous avons cherché, dans ce paragraphe, les résultats qu'on peut obtenir par l'emploi des quotients incomplets, que nous désignons, d'après Legendre, par le symbole $E\frac{n}{x}$, où n et x sont généralement supposés être des nombres entiers.

La proposition principale sur laquelle sont basées ces recherches s'obtient en ramenant la série générale:

$$F\left(E\frac{n}{1}\right)+F\left(E\frac{n}{2}\right)+F\left(E\frac{n}{3}\right)+\ldots F\left(E\frac{n}{a}\right)$$

à la forme:

$$A_0F(q)+A_1F(q+1)+\ldots A_nF(n).$$

Les transformations qui en résultent ont pour expressions les formules générales (91)—(96), dans les dernières desquelles q désigne $E\sqrt{n}$ et $f(x)=F(x)-F(x-1)$. Un cas particulier de (96) est la formule de Dirichlet:

$$\sum_1^n E\frac{n}{x}=2\sum_1^q E\frac{n}{x}-q^2\,, \tag{103}$$

qui permet de déterminer approximativement le nombre des diviseurs dans les nombres de 1 à n, comme on a d'après (104):

$$\sum_1^n E\frac{n}{x}=nln+n(2C-1)\pm\rho\sqrt{n}\,,\qquad (\rho<3)$$

où C est la constante d'Euler. Une telle formule a été employée par M. Dirichlet et, récemment, par MM. Berger et Cesáro pour la détermination de fonctions symétriques des diviseurs des nombres; quelques-uns des résultats de M. Berger sont reproduits dans (107).

Les formules (97)—(99) représentent une généralisation des formules correspondantes (90), (93) et (96); z y désigne une variable qui parcourt une série de «nombres particuliers» choisis arbitrairement de 1 à n, et $\Phi(n)$, le nombre de ceux qui sont $\overline{\overline{<}}\, n$.

Différents exemples de l'emploi de ces formules sont donnés tant par M. Berger que par M. Cesáro.

---

§ 5. Applications aux nombres premiers. Ce paragraphe renferme une série d'exemples de la détermination de la totalité des nombres premiers à l'aide des quotients incomplets.

Le plus simple est la formule bien connue (109) pour la détermination, jusqu'à x inclusivement, de la quantité des nombres qui ne sont pas divisibles par les nombres premiers $a, b, c\ldots$ formule qu'on peut employer pour calculer $\theta(x)-\theta(x^{\frac{1}{2}})$. Dans ce qui suit, on se sert en effet du cas spécial de (100) exprimé dans la formule:

$$\sum_1^n \Phi\left(\frac{n}{x}\right)=\sum_1^n\frac{n}{z}\,, \tag{110}$$

laquelle fournit les moyens d'exprimer les différentes sommes $\Sigma E\frac{n}{p}$, $\Sigma E\frac{n}{p^2}$, $\Sigma E\frac{n}{ab}$, etc. à l'aide des quantités des nombres premiers, et conduit aux relations identiques:

$$\theta(n) + \theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p}\,; \tag{111}$$

$$\mathfrak{p}(n) + \mathfrak{p}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathfrak{p}\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p} + \Sigma E\frac{n}{p^2} + \Sigma E\frac{n}{p^3} + \ldots; \tag{115}$$

$$\vartheta(n) + \vartheta\left(\frac{n}{2}\right) + \vartheta\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p} + \frac{1}{2}\Sigma E\frac{n}{p^2} + \frac{1}{3}\Sigma E\frac{n}{p^3} + \ldots \tag{116}$$

Le symbole $\mathfrak{p}(n)$ désigne ici le nombre des puissances des nombres premiers jusqu'à n avec un exposant entier.

Ces formules peuvent ensuite servir à déterminer $\theta(n)$, $\mathfrak{p}(n)$ et $\vartheta(n)$ à l'aide des facteurs de Möbius. Par l'inversion de la formule de $\theta(n)$, M. Bougaïeff a ainsi obtenu la formule (119); plus simple est cependant la suivante:

$$\mathfrak{p}(n) = \Sigma E\frac{n}{a} - 2\Sigma E\frac{n}{ab} + 3\Sigma E\frac{n}{abc}\ldots \tag{125}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme (126).

Au lieu de représenter cette formule par l'inversion directe de (115), nous l'avons rattachée à la formule (118), qui donne la fonction symétrique $\Sigma f(d_z)$ formée de tous les diviseurs des nombres de 1 à n qui appartiennent à une série de «nombres particuliers» z. Elle nous apprend, par ex., que $\Sigma E\frac{n}{p}$ désigne la totalité des diviseurs des nombres de 1 à n qui sont premiers, $\Sigma E\frac{n}{ab}$, le nombre de ceux qui sont un produit de deux nombres premiers, etc., d'où une vérification facile de l'exactitude de (125) et des formules analogues.

Nous considérons ensuite les formules qui déterminent la fonction $\psi(n)$ de Tchebycheff. On montre d'abord que:

$$\sum_1^n lx = \Sigma lp\left(E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + E\frac{n}{p^3} + \ldots\right), \tag{129}$$

et en transformant cette expression par l'introduction de la somme des logarithmes des nombres premiers jusqu'à n inclusivement, somme qui est désignée par $F(n)$, on obtient les deux équations:

$$T(n) = \sum_1^n lx = \psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right) \tag{131}$$

et

$$\psi(n) = F(n) + F(n^{\frac{1}{2}}) + F(n^{\frac{1}{3}}) + \ldots, \tag{130}$$

ou aussi

$$\psi(n) = \Sigma lp\,.\,E\frac{ln}{lp}\cdot \tag{132}$$

Les deux formules (130) et (131) sont celles que M. Tchebycheff a le premier données dans son célèbre «Mémoire sur les nombres premiers»; elles permettent, par un double emploi des facteurs de Möbius, de déterminer l'importante fonction $\psi(n)$.

$T(n)$ peut aussi être exprimé de plusieurs autres manières par $\psi(n)$; en prenant la différence entre $T(n)$ et $T(n-1)$, on déduit de ces transformations les formules:

$$ln = \sum_1^n \tilde{\omega}\left(\frac{n}{x}\right) l\,\frac{n}{x} = \Sigma\tilde{\omega}(d)\,ld\,, \qquad (134) \text{ et } (136)$$

où $\tilde{\omega}(x)$ désigne, comme auparavant, une fonction qui est égale à $\frac{1}{m}$ lorsque $x = p^m$ et nulle dans tous les autres cas, et d tous les diviseurs de n.

Ces équations, qui sont évidentes, peuvent, de même que la formule $T(n) = \sum_1^n E\frac{n}{x}\,\tilde{\omega}(x)\,lx$, être considérées comme de simples définitions de la fonction $\tilde{\omega}(x)$, et s'il était possible de déterminer $\tilde{\omega}(x)$ exactement ou approximativement, on obtiendrait par sommation des formules d'approximation correspondantes tant pour $\vartheta(n) = \sum_1^n \tilde{\omega}(x)$ que pour $\psi(n) = \sum_1^n \tilde{\omega}(x)\,lx$. Nous sommes donc conduit ici, comme par la formule de Riemann, à considérer la fonction $\vartheta(n)$ comme admettant, au point de vue analytique, une définition plus simple que $\theta(n)$ elle-même.

Le reste du paragraphe est consacré à différentes formules qui donnent de curieuses identités entre les quantités des nombres premiers. Elles sont des conséquences des formules générales développées plus haut, mais on ne saurait guère en faire d'autres applications et, notamment, elles ne se prêtent pas plus que les relations qui précèdent á l'établissement direct de formules d'approximation analytiques.

---

§ 6. Détermination approchée de la fonction $\tilde{\omega}(x)$. En nous basant sur les définitions précédentes de $\tilde{\omega}(x)$, nous avons cherché, dans ce paragraphe, à déterminer la valeur moyenne de cette fonction ou plutôt de $\tilde{\omega}(x)\,lx$, qui y est désignée par $\tau(x)$. Nous considérons d'abord les formules (145), dont la première, $ln = \sum_1^n \tau\left(\frac{n}{x}\right)$, peut seulement servir à la détermination de $\tau(x)$ par l'emploi des facteurs de Möbius. Mais une comparaison de deux formules :

$$ln = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right)\tau(x) \quad \text{et} \quad ln = \sum_1^n \frac{1}{x}\,t(x),$$

dont la dernière définit une fonction $t(x)$ qui doit se rapprocher de la valeur moyenne de $\tau(x)$, semble indiquer que celle-ci converge vers l'unité lorsque n croît indéfiniment. La troisième expression :

$$ln = \Sigma\,\tau(d)\,,$$

où la somme Σ comprend tous les diviseurs du nombre n, donne le même résultat. En remplaçant $\tau(x)$ par une fonction $t(x)$ déterminée de manière que sa valeur moyenne, prise par rapport à tous les diviseurs dans un nombre voisin de n, soit ln, on trouve à l'aide des formules (107) qu'elle est déterminée par:

$$t(n) = 1 - \frac{k}{n}\,, \qquad (147)$$

où k est une constante. Cette valeur peut donc être considérée comme la valeur moyenne de tous les τ qui correspondent aux diviseurs des nombres dans le voisinage de n.

On peut aussi considérer directement la formule $T(n) = \sum_2^n E\frac{n}{x}\,\tau(x)$, en formant la valeur moyenne de tous les τ correspondant aux valeurs de x depuis 2 jusqu'à n, avec les poids $E\frac{n}{x}$. Cette valeur moyenne est alors donnée par les formules:

$$\tau_1(n) = \frac{T(n)}{\sum\limits_2^n E\frac{n}{x}} = 1 - \frac{2C-1}{ln} - \frac{2C-2}{(ln)^2} + R, \qquad (148) \text{ et } (149)$$

et converge également vers la limite 1 lorsque n croît.

Il n'est pas sans intérêt de former la valeur moyenne de tous les τ compris dans la différence $T(n) - 2\,T\left(E\frac{n}{2}\right)$, où tous les coefficients sont nuls ou égaux à 1, comme on le voit par l'exemple (152). Cette valeur moyenne devient:

$$\tau_2(n) = 1 \pm \frac{\rho}{l2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2l2}\,\frac{ln}{n} + \ldots \qquad (156)$$

et se rapproche plus de 1 que les autres valeurs moyennes.

Les résultats obtenus indiquent bien que la valeur moyenne d'une série de $\tau(x)$ successifs doit se rapprocher de la limite 1, mais ils n'en donnent pas une démonstration satisfaisante, comme on n'a pas réussi à trouver, pour une somme de la forme $\sum\limits_1^n \tau(x)$, une expression suffisamment exacte qui pût servir à former une valeur moyenne de la fonction $\tau(x)$ où tous les poids fussent égaux. La formule qui satisfait le mieux à cette condition est l'expression (156) pour $\tau_2(n)$. Il n'y entre en effet que des poids qui sont tous nuls ou égaux à 1, et, chose à remarquer, tous les $\tau(x)$ qui correspondent à des valeurs de x comprises entre $\frac{n}{2}$ et n ont pour poids l'unité.

Mais ces valeurs moyennes ont cependant quelque importance, en ce sens qu'elles confirment que la partie continue de la formule de Riemann donne une bonne approximation de la totalité des puissances des nombres premiers divisées par leurs exposants.

---

§ 7 La fonction $\psi(x)$. Comme $\psi(n) = \sum\limits_2^n \tau(x)$, on doit s'attendre, d'après ce qui précède, à ce que cette fonction ne s'écarte pas beaucoup de $n-1$, et cette expression mise dans la formule :

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right),$$

donnera aussi une bonne approximation de la vraie valeur de $T(n)$. La détermination directe de $\psi(n)$ par cette formule s'obtient par inversion à l'aide des facteurs de Möbius, comme le fait voir la formule (160). C'est par cette voie que M. Tchebycheff a trouvé les véritables limites de $\psi(n)$ indiquées dans (166). Mais ces limites sont certainement beaucoup trop larges. Nous avons essayé d'employer d'autres formes de $\psi(n)$ obtenues par inversion, mais sans résultat satisfaisant, bien que la formule :

$$\psi(n) = -\sum_1^n \mu(x)\,E\frac{n}{x}\cdot lx \qquad (170)$$

présente quelque intérêt comme étant très voisine de la formule (33) de Möbius.

Par contre, la méthode de **Riemann** peut donner pour $\psi(n)$, ou plutôt pour $\frac{1}{2}(\psi(n-0)+\psi(n+0))$, une expression qui mérite d'être remarquée. On l'obtient en traitant l'intégrale:

$$2\pi\psi(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r} D_r ls(r)\, dz \tag{171}$$

de la même manière que celle de **Riemann**. En effet, en introduisant dans cette intégrale l'expression qu'il a donnée pour $ls(r)$, et en intégrant terme par terme, on trouve:

$$\psi(x) = (x-1) - l(1-x^{-2}) - 2x^{\frac{1}{2}}\Sigma_\alpha \frac{\frac{1}{2}\cos\alpha lx + \alpha\sin\alpha lx}{\frac{1}{4}+\alpha^2} + \lambda\,, \tag{178}$$

où λ est une constante dont la valeur est voisine de 0. Cette formule est analogue à celle de **Riemann** pour $\vartheta(x)$ et présente, quant aux termes périodiques, les mêmes manques provenant des racines α; mais elle est beaucoup plus simple, et comme $\vartheta(x)$ peut être déterminée par $\psi(x)$ avec une approximation assignable, il sera sans aucun doute plus pratique de s'attacher principalement à trouver cette dernière fonction.

En raison de l'analogie de cette série périodique avec la série périodique (181), j'ai déduit de celle-ci une série (183) complètement analogue à Σ_α, et dont la somme peut être exprimée à l'aide de nombres premiers et de quotients incomplets. Quoique cette série n'ait pas été ramenée à la fonction $\psi(x)$, il semble cependant qu'une telle transformation pourrait être opérée en remplaçant les différences $\frac{lx}{lp} - E\frac{lx}{lp}$ par des séries trigonométriques infinies, de sorte qu'il serait possible, par cette voie indirecte, de déterminer les racines α, qui peut-être sont des fonctions simples des nombres premiers eux-mêmes.

Un pareil résultat serait un progrès, en ce sens qu'on passerait ainsi directement d'identités purement numériques à la formule de **Riemann**, et arriverait par suite à mieux pénétrer le caractère de cette dernière, mais les difficultés relatives à la détermination des limites absolues des erreurs n'en seraient pas notablement diminuées.

Qu'il soit possible de passer directement d'une de ces espèces de formules à l'autre, c'est ce qu'on peut constater en considérant, entre autres, la formule suivante, qui est un supplément de (167):

$$\psi(x) = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\overset{(g)}{\Sigma} lp + \frac{1}{\pi}\overset{(g)}{\Sigma} lp \frac{\sin\frac{2m\pi lx}{lp}}{m}\,, \tag{184}$$

où g désigne une limite arbitraire $\geqq x$, et où la somme Σ s'étend à tous les m de 1 à ∞ et à tous les $p \overline{\overline{<}}\, g$. On trouve cette formule en décomposant dans la fonction:

$$\frac{1}{\sigma(r)} = \overset{g}{\underset{1}{\Pi_p}}(1-p^{-r})\,,$$

où le produit Π est pris pour tous les nombres premiers $\overline{\overline{<}}\, g$, chaque facteur en facteurs linéaires par rapport à r, et en introduisant ensuite l'expression ainsi obtenue dans l'intégrale de $\psi(x)$. En effet, on obtiendra de cette manière le même résultat qu'avec $ls(r)$ lui-même, qui contient tous les nombres premiers. Une formule correspondante pour $\vartheta(x)$ est donnée dans (83) ou (84). Enfin, on peut, au moyen de (185), transformer directement (184) en une expression connue:

$$\psi(x) = \overset{(g)}{\Sigma} lpE\frac{lx}{lp} \qquad \text{(voir 132).}$$

Dans une note ajoutée à la fin de ce paragraphe, on fait remarquer que les termes dominants dans les formules de $\psi(x)$ et de $\vartheta(x)$ proviennent du terme $-l(r-1)$ dans la formule de $ls(r)$, et qu'il en est de même des formules (63) et (64), où le degré d'approximation est en outre facile à calculer.

On fait également observer que la marche suivie par M. Tchebycheff dans son premier mémoire «Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée», conduit à une détermination de $\lim \psi(n)$, pour $n = \infty$, qui s'accorde avec ce qui précède, car les considérations qu'il fait valoir montrent, avec un léger changement, que $\sum\limits_{2}^{\infty}(1-\tau(x))\,x^{-r}(lx)^m$, pour $m = 0, 1, 2 \ldots$, continue à être une grandeur finie, lorsque r converge vers 1. Nous nous sommes contenté de cette indication parce qu'il nous semble que M. Tchebycheff n'a pas suffisamment justifié le point de départ de ces formules; ce qu'il s'agit surtout ici de montrer, s'est que son résultat, la formule d'approximation $Li(x)$ pour $\theta(x)$, n'est pas en opposition avec la formule de Riemann; tout au contraire, il serait précisément arrivé à établir la même formule pour $\vartheta(x)$ si, au lieu de $-\Sigma l(1-p^{-r})$, il ne s'était pas seulement borné à employer le terme Σp^{-r}.

---

§ 8. Formules d'approximation pour $\vartheta(n)$ et $\theta(n)$. Lorsque la valeur moyenne de $\tau(n)$ est égale à 1, la valeur moyenne correspondante de $\psi(n)$ sera $n-1$ et celle de $\vartheta(n)$, $\sum\limits_{2}^{n}\frac{1}{lx}$. Dans tous les cas, on peut poser $\tau(x) = t(x) + f(x)$, où $t(x)$ désigne la valeur moyenne de $\tau(x)$ $\left(\text{par conséquent 1 ou, si l'on veut, } 1-\frac{k}{x}\right)$, et, en même temps, on aura $\psi(n) = \sum\limits_{2}^{n} t(x) + F(n)$, où $F(n) = \sum\limits_{2}^{n} f(x)$, de même que $\vartheta(n) = \sum\limits_{2}^{n}\frac{t(x)}{lx} + R(n)$, où l'erreur $R(n) = \sum\limits_{2}^{n}\frac{f(x)}{lx}$, comme il est facile de le montrer, est du même ordre que l'erreur dans l'expression approchée de $\psi(n)$. En introduisant dans $\psi(n)$ les limites de M. Tchebycheff, qui donnent $F(n) = \lambda . n$, on voit que, pour l'écart entre $\vartheta(n)$ et $Li(n)$, les limites sont proportionnelles à la fonction $\vartheta(n)$ elle-même, et il résulte également de (191) que $\theta(n)$ pourra, avec une approximation analogue, être déterminée comme $P(x)+1$. Nous n'avons pas réussi à établir pour les écarts des limites absolues plus étroites que celles qui découlent des limites de Tchebycheff pour $\psi(n)$, mais il n'est guère douteux qu'il ne soit possible de trouver des limites de la forme $\pm\lambda\sqrt{n}$, où λ est une constante.

Par contre, il est facile de calculer la somme des carrés des écarts entre $\tau(x)$ et 1 comme entre $\tilde{\omega}(x)$ et $\frac{1}{lx}$. On trouve respectivement:

$$S = \sum_{2}^{n}(\tau(x)-1)^2 < 1{\cdot}2\,(ln-1)\,n$$

et

$$M^2 = \sum_{2}^{n}\left(\frac{\tau(x)-1}{lx}\right)^2 < \frac{1{\cdot}2\,n}{ln}, \tag{189}$$

ou, d'une autre manière, l'expression (190). Ces deux dernières formules, qui ne donnent certainement que des approximations grossières, indiquent qu'une grandeur proportionnelle à $\sqrt{\vartheta(n)}$ doit donner une limite supérieure pour l'écart moyen entre $\vartheta(n)$ et $Li(n)$.

Ainsi qu'il résulte des comparaisons que M. Glaisher a entreprises entre les différentes formules et les quantités des nombres premiers véritablement énumérés, la formule de Riemann, en tant qu'elle a pu être vérifiée, est très supérieure aux autres, et il ne doit guère être possible d'obtenir de bien meilleurs résultats en employant des formules continues qui ne donnent pas des courbes avec des points d'inflexion. Cependant il pourrait valoir la peine d'essayer pour $\theta(n)$ d'employer une formule d'approximation de la forme:

$$\theta(n) = \frac{n(1+\lambda'_n)}{ln},$$

où λ' est une fonction $f(n)$, une forme qui se rattache étroitement à la formule $\psi(n) = n-1$.

Mais il faut, d'après ce qui précède, regarder comme certain qu'on commet une erreur systématique de l'ordre $\vartheta(n^{\frac{1}{2}})$ en employant le logarithme intégral comme formule d'approximation pour $\theta(n)$ au lieu de $\vartheta(n)$.

---

§ 9. Intervalle entre deux nombres premiers consécutifs. La limite supérieure de cet intervalle pourra facilement être déterminée quand on aura trouvé les limites absolues d'une fonction arbitraire $F(n)$ qui varie seulement lorsque n passe par un nombre premier. En effet, en supposant que ces limites sont des fonctions de n exprimées par $A(n)$ et $B(n)$, de sorte que:

$$A(n) < F(n) < B(n) \tag{194}$$

pour tous les n plus grands qu'un nombre donné, et en désignant par p un nombre premier et par $p+a+1$ le suivant, on trouvera la limite supérieure de a en résolvant une des équations:

$$A(p) = B(p+a) \quad \text{ou} \quad A(p+a) = B(p). \tag{195}$$

En employant la même méthode pour déterminer l'intervalle entre deux nombres consécutifs qui sont des puissances de nombres premiers dans le voisinage du nombre n, on trouvera facilement, à l'aide des limites de M. Tchebycheff pour $\psi(n)$, que:

$$a < \frac{1}{5}n + 3\sqrt{n}; \tag{198}$$

mais on peut regarder comme certain que cette limite est beaucoup trop élevée. D'autre part, si l'on pouvait montrer que les limites de $\psi(n)$ dépendent de $\sqrt{n}$ comme on l'a supposé dans (199), la limite de l'intervalle serait aussi déterminée d'une manière tout à fait analogue.

Pour mieux voir comment l'intervalle varie en réalité, j'ai réuni dans le tableau p. 255 les intervalles relativement les plus grands entre les puissances des nombres premiers dans la première partie de la suite des nombres, ainsi que quelques-uns des intervalles les plus considérables au-dessus de 100, et les ai comparés soit avec $\sqrt{n}$, soit avec ln et $(ln)^2$. Il semble résulter de cette comparaison que l'intervalle croît moins fortement que $\sqrt{n}$ mais plutôt comme $(ln)^2$. On pourrait sans doute en représenter la limite par une série très convergente de la forme:

$$a = \alpha + \beta\, ln + \gamma(ln)^2 + \delta(ln)^3 + \ldots,$$

où les coefficients sont d'une nature telle, que le troisième terme est le terme dominant dans la partie de la suite des nombres pour laquelle on a des tables de diviseurs.

---

§ 10. Explication des tables. Nous expliquerons brièvement dans ce qui suit le contenu des tables qui accompagnent ce mémoire. Sauf remarque du contraire, elles ont été calculées par l'auteur, l'importante table II dans l'automne de 1882, avant qu'il eût l'occasion de se servir de la comparaison établie par M. Glaisher entre la totalité des nombres premiers et la formule de Riemann.

Table I. Valeurs des sommes des puissances réciproques des nombres et leurs logarithmes.

Les 1e, 2e et 4e colonnes de cette table sont reproduites d'après Merrifield, tandis que, dans la 3e colonne, les logarithmes vulgaires des sommes $s(r)$ des puissances ont été calculés par l'auteur lui-même et contrôlés par comparaison avec les logarithmes naturels.

Table II. Valeurs de e^x et de $Li(e^x)$ depuis $x = 5$ jusqu'à $x = 20$, avec un intervalle de 0·2.

Ces valeurs, à l'exception des logarithmes intégrals de $x = 5$ à $x = 7$, qui sont donnés d'après Bretschneider (avec une augmentation du dernier chiffre là où il a ajouté deux points), ont été calculées par l'auteur suivant la méthode qu'on trouvera indiquée plus loin dans le supplément. Comme il s'était d'abord seulement proposé d'obtenir environ 12 chiffres exacts, les dites valeurs se présentent avec un nombre de décimales un peu différent. Relativement à l'exactitude, nous remarquerons que, notamment dans la dernière partie de la table, il peut régner quelque incertitude sur le dernier chiffre. Comme moyen de contrôle, on a indiqué les différences entre les valeurs elles-mêmes.

Table III. Valeurs de la fonction $P(e^x)$ de $x = 0$ à $x = 20$ avec un intervalle de 0·1, avec les logarithmes correspondants, etc.

Dans cette table, log $P(e^x)$ doit être regardé comme la partie principale, tandis que les valeurs de la fonction $P(e^x)$ ne figurent que pour le contrôle. Elle a été calculée comme il suit. Dans la première partie de la table, les valeurs de:

$$P(e^x) = \frac{x}{[1].1s_2} + \frac{x^2}{[2].2s_3} + \frac{x^3}{[3].3s_4} + \dots$$

ont été trouvées directement par le calcul logarithmique des différents termes de la série; mais ce calcul étant bientôt devenu trop compliqué à cause du grand nombre des termes, j'ai déterminé de la même manière la série correspondante:

$$Q(e^x) = \frac{s_2 - 1}{s_2} \cdot \frac{x}{[1].1} + \frac{s_3 - 1}{s_3} \cdot \frac{x^2}{[2].2} + \frac{s_4 - 1}{s_4} \cdot \frac{x^3}{[3].3} + \dots \tag{201}$$

après quoi j'ai trouvé:

$$P(e^x) = Li(e^x) - C - lx - Q(e^x). \tag{202}$$

Pour les plus hautes valeurs de x, je me suis servi de la série $R(e^x)$ déterminée par (203), laquelle a donné:

$$P(e^x) = Li(e^x) - C - lx - \frac{1}{2} P(e^{\frac{x}{2}}) - R(e^x), \tag{204}$$

$P(e^{\frac{x}{2}})$ étant pris dans la partie déjà terminée de la table.

Dans le calcul de $Q(e^x)$ et de $R(e^x)$, on a seulement employé des logarithmes avec 5 ou 6 décimales, et pour en vérifier l'exactitude, on a soumis à des preuves par différences les logarithmes à 5 décimales de ces fonctions, comme les logarithmes de toutes les fonctions qui figurent ici varient de façon que les différences décroissent avec une très grande rapidité. Par suite de cette circonstance, on a jugé plus pratique de construire une table de log $P(e^x)$ qu'une table de $P(e^x)$, parce qu'il en est résulté cet avantage qu'un grand nombre des logarithmes cherchés ont pu être déterminés par interpolation. En effet, les valeurs indiquées dans la table pour les fonctions ont seules été calculées directement, et leurs logarithmes ont servi à trouver les autres par interpolation. Pour $x > 8 \cdot 4$, on a d'abord calculé les nombres placés sous la rubrique $Li(e^x) - P(e^x)$, et, avec leurs logarithmes, on a déterminé les autres par trisection de l'intervalle suivant la méthode de Briggs. Les logarithmes ainsi trouvés ont de nouveau été employés dans la construction de la table de $P(e^x)$ pour $x > 10$. Relativement à l'exactitude qui a été obtenue, le dernier ou quelquefois les deux derniers chiffres des valeurs fondamentales de $P(e^x)$ ne peuvent être regardés comme certains, tandis que, dans les logarithmes, il ne règne en général de l'incertitude que sur le dernier chiffre, de sorte que la table donnera toujours une approximation suffisante pour l'usage auquel elle est destinée.

Table IV. Totalité des nombres premiers dans chaque centaine de 1 à 10000, avec les valeurs correspondantes de $\theta(x)$ pour les 100 premiers multiples respectivement de 100 et de 1000, et

Table V. Totalité des nombres premiers dans chacun des 90 premières centaines de mille, avec les valeurs correspondantes de $\theta(x)$ pour les 90 premiers multiples de 10^5.

Ces tables donnent les résultats des énumérations faites dans les tables des diviseurs, telles qu'elles résultent de la comparaison établie par M. Glaisher dans son introduction à la table des diviseurs pour le 6^e^ million, et elles sont par suite entachées des erreurs qui ont pu se glisser dans les dites tables. Oppermann en a ainsi relevé une en constatant que 1330001 est un nombre premier, tandis que Burckhardt le donne comme composé. Il n'a pas été tenu compte ici de cette correction. Rappelons enfin que nous n'avons pas compté 1 parmi les nombres premiers comme M. Glaisher le fait.

Table VI. Comparaison entre les valeurs de $\theta(e^x)$ et de $P(e^x)$ pour $x < 15$.

Cette table est une supplément à la comparaison établie par M. Glaisher, et a surtout de l'importance pour les nombres inférieurs. Elle a été originairement construite pour rechercher si la distribution, en apparence périodique, des grands écarts qu'on trouve dans le diagramme publié par ce géomètre dans sa table pour le 6^e^ million, existe réellement. Cela ne semble pas cependant être le cas. La table renferme en outre, dans la dernière colonne, l'écart moyen entre θ et $P+1$ calculé pour chaque groupe de 10 écarts consécutifs.

Table VII. Valeurs de $\psi(x)$ pour tous les nombres de 1 à 2000.

Ces valeurs ne sont cependant indiquées que pour les valeurs de x qui font varier $\psi(x)$. Elles ont été obtenues par la sommation des logarithmes naturels des tables de Vega, et contrôlées soit par le calcul de $T(2000)$ soit par comparaison avec les logarithmes vulgaires correspondants. La table contient en outre, jusqu'à 300, les valeurs de diverses autres fonctions numériques, dont l'importance pour ces recherches est évidente. Les valeurs de la série $\Sigma \frac{1}{x} \mu(x)$ sont formées à l'aide des «Tables of squares, cubes, etc.» de M. Barlow, London 1860, où l'on a pris les valeurs réciproques de x.

§ 11. Conclusion. Si, en terminant, nous jetons un coup d'œil en arrière sur les résultats qu'ont donnés les recherches qui précèdent, nous ne saurions nier qu'ils ne semblent guère être en rapport avec le grand appareil qui a été mis en œuvre. Nous n'avons en effet établi par aucune preuve rigoureuse qu'une fonction $f(x)$, indépendante des tables des diviseurs, est liée à $\theta(x)$ de manière que $\operatorname{Lim}\frac{\theta(x)-f(x)}{f(x)}=0$. Tous les moyens que nous avons employés ont seulement abouti à montrer que tel est probablement le cas de la fonction de Riemann que nous avons désignée par $P(x)+1$, et notamment que son écart d'avec $\theta(x)$ est toujours compris dans des limites de l'ordre $\sqrt{x}$. Bien que beaucoup de signes indiquent que d'autres recherches plus approfondies seront encore nécessaires pour établir une pareille preuve, il n'est cependant pas invraisemblable que, relativement à ce problème spécial, nous nous serions approché plus près du but en fixant exclusivement notre attention sur les valeurs asymptotiques des fonctions dont il s'agit. Mais c'est à dessein que nous ne nous sommes pas placé à ce point de vue, parce que, en réalité, il importe davantage de connaître des formules d'approximation qui puissent être employées pour des valeurs finies des arguments, et que de telles formules donneront en même temps les formules d'approximation asymptotiques.

Mais nous avons pourtant obtenu quelque chose par nos recherches, et nous croyons en outre que c'est quelque chose d'essentiel. En premier lieu, pour ce qui regarde la remarquable formule de Riemann, non seulement nous avons ramené la preuve de l'origine de son intégrale à des données relativement simples qui permettent d'en pénétrer plus profondément la nature, mais, par le commentaire dont le traitement même de cette intégrale a été l'objet, nous avons aussi écarté toutes les difficultés qu'elle présente et éclairci le désaccord existant entre les formules de Riemann et de Genocchi, désaccord sur lequel ce dernier s'exprime lui-même très modestement. Toutes les difficultés du développement de Riemann sont ramenées par là à la détermination du développement de $ls(r)$, problème qui peut être traité indépendamment de la théorie des nombres premiers. En outre, relativement aux racines α, nous avons donné quelques indications qui ne seront pas sans utilité pour des recherches futures. D'une importance plus pratique est cependant la forme élégante que nous avons donnée à la fonction $P(x)$, forme qui a le grand avantage de pouvoir se prêter à un calcul numérique facile.

De plus, et ce n'est pas sans importance, nous avons reproduit un certain nombre de recherches éparses et peu connues sur la théorie des nombres et, en les mettant en relation avec la fonction $\psi(x)$ de M. Tchebycheff, montré qu'elles conduisent aussi à considérer non pas la fonction $\theta(x)$, mais $\vartheta(x)$, comme celle qui doit jouer le premier rôle dans ces recherches.

Nous sommes arrivé ainsi, par des considérations tirées de la théorie même des nombres, à indiquer le rôle que le logarithme intégral doit jouer dans la détermination de la totalité des nombres premiers, et, bien que la démonstration ne soit pas complètement satisfaisante, elle l'est cependant assez pour que, par cette voie, on eût pu être conduit à faire de $Li(x)$ une formule d'approximation de $\vartheta(x)$, même si la formule de Riemann n'avait pas déjà été connue. Il semble en même temps qu'en poussant plus loin ce genre de recherches, il serait possible d'obtenir une preuve certaine que la limite de l'erreur dépend de $\sqrt{x}$, mais cela exigerait sans doute préalablement une étude plus approfondie des restes qu'on trouve en divisant un nombre par tous ceux qui le précèdent dans la suite naturelle des nombres. En effet, la difficulté que nous avons toujours rencontrée pour resserrer les limites dont il s'agit provient, entre autres, précisément de la circonstance que, pour des différences de la forme $\frac{n}{x} - E\frac{n}{x}$, on ne peut, même lorsqu'on en a une somme, obtenir des limites plus étroites que 0 et 1. Qu'il y ait vraiment quelque chose à faire dans cette voie, c'est ce qui ressort, en particulier, du mémoire souvent cité de M. Berger. Une discussion plus approfondie des problèmes qui se rattachent à des séries renfermant des facteurs $\mu(x)$, semble également devoir être très désirable pour l'avancement de ces recherches, car on arriverait peut-être aussi par là à combler les lacunes que présente notre travail.

Enfin, nous considérons comme le résultat le plus important de nos recherches d'avoir montré que tous les travaux antérieurs indiquent le logarithme intégral $Li(x)$ comme formule d'approximation de $\vartheta(x)$, et que $\psi(x)$ peut être représentée approximativement par une expression de la forme x — const. Plusieurs circonstances indiquent que la solution complète du problème qui nous occupe n'excède pas les ressources de l'analyse moderne, et nous espérons que ce travail pourra contribuer à orienter les investigateurs futurs dans les différents points de vue sous lesquels il peut être considéré, et à en faciliter ainsi indirectement la solution.

Supplément: Sur le calcul de la fonction $Li(e^x)$.

Pour déterminer les valeurs de $Li(e^x)$ données dans la table II, j'ai calculé les différences entre deux valeurs de $Li(e^x)$ correspondant à des intervalles égaux. En effet, comme

$$\int_a^{a+x} \frac{e^x}{x}\,dx = e^a \int_0^x \frac{e^x}{a+x}\,dx = \frac{e^a}{a}\left[\int_0^x e^x dx - \int_0^x e^x\left(\frac{x}{a}\right)dx + \int_0^x e^x\left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \ldots\right],$$

il s'agira seulement de calculer successivement des intégrales de la forme:

$$N_n = \frac{e^a}{a}\int_0^x e^x\left(\frac{x}{a}\right)^n dx,$$

où n est un nombre entier et $x < a$. Si l'on pose $N_n = \frac{e^a}{a} A_n$, on trouvera sans difficulté par intégration partielle une formule récurrente à l'aide de laquelle les N consécutifs pourront être facilement déterminés, et on obtiendra le même résultat en calculant une fois pour toutes les intégrales $\int_0^x e^x x^n dx$ correspondant à des valeurs déterminées de x. En prenant pour a un nombre entier et $x = 1$, cette manière de procéder a donné, après détermination préalable des puissances en question de e, un moyen relativement simple pour calculer $Li(e^{a+1}) - Li(e^a)$ pour $a = 16$ à 20, et ces valeurs, conjointement avec celles calculées auparavant par MM. Bretschneider et Glaisher, ont ensuite pu servir à contrôler le calcul plus détaillé qu'exigent les intervalles plus petits.

Pour ce calcul, on a employé les formules (8)—(10) en prenant successivement pour a les arguments qui figurent dans la table II avec l'intervalle 0·2, x restant toujours égal à 0·1. Les premières valeurs de N ont ensuite été calculées par des multiplications et des divisions directes, tandis que, pour trouver celles de N_3 et des N suivants, on a jugé plus simple de calculer par logarithmes les termes dont il s'agit à l'aide des intégrales $\int_{-0\cdot 1}^{+0\cdot 1} e^x x^n dx$ déterminées une fois pour toutes. De cette manière, on a trouvé une série très rapidement convergente pour la détermination des différences successives de la table, et, par celles-ci, toutes les valeurs de $Li(e^x)$, dont le dernier chiffre, dans la table, est augmenté d'une unité lorsque le chiffre suivant est égal à 5 ou plus grand que 5.

Si, pour intervalle, j'ai choisi 0·2 et non 0·1, la raison en est, d'une part, que le calcul en est facilité et, de l'autre, que mon intention à l'origine était seulement de calculer une table des logarithmes de $Li(e^x)$ avec 10—12 décimales. En réalité, une pareille table pourrait être construite par interpolation à l'aide des logarithmes des valeurs contenues dans la table II, et serait la forme la plus commode d'une table de logarithmes intégrals des grandes valeurs de n, surtout si les arguments étaient les logarithmes vulgaires. Mais j'y ai renoncé parce que, pour ces recherches spéciales, il était préférable de construire une table de log $P(e^x)$.

C'est seulement après avoir terminé ce travail que j'ai eu connaissance de la 3e partie des tables à 14 chiffres de M. Stenberg. Dans une introduction, l'auteur développe une série de formules qui, dans leurs parties essentielles, sont identiques à celles qui ont été développées plus haut.

J'ai également plus tard eu communication de quelques calculs inédits de $Li(e^x)$ pour des valeurs entières de x jusqu'à $x = 20$, dus à feu M. le professeur Oppermann. Ils ont été effectués à l'aide des formules (11) et (12) et fournissent par suite un moyen de contrôle, puisque, pour chaque valeur entière de a, on détermine en même temps les deux intégrales:

$$\int_{a-\xi}^{a} \frac{e^x}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_{a}^{a+\xi} \frac{e^x}{x} dx ,$$

l'intervalle ξ étant partout le même et ici égal à 1.

On trouvera dans le tableau, p. 268, le résultat de ce calcul. Les valeurs de e^x ont été calculées en partie par Oppermann, en partie, pour ce qui concerne les dernières, par l'auteur, qui, en même temps, a entrepris le calcul des trois dernières valeurs de $Li(e^x)$, pour lesquelles Oppermann n'avait pas obtenu plus de 12 décimales exactes. M. Bretschneider ayant, avec la même exactitude, déterminé les valeurs correspondantes de $Li(e^x)$ pour les valeurs inférieures de x, on possède ainsi les valeurs fondamentales de cette fonction calculées avec 20 décimales jusqu'à $x = 20$.

Errata.

(Les formules sont comptées pour des lignes.)

Page	193—11,	ligne 14,	au lieu de:	$\sum\limits_1^n x^{-r} = C -$ etc.,	lisez:	$\sum\limits_1^n x^{-r} = s_r -$ etc.
»	195—13,	formule (29),	» » »:	$z^{-\frac{1}{6}}$,	»:	$z^{\frac{1}{6}}$
»	199—17,	ligne 22,	» » »:	$\int\limits_0^\infty h(x) x^{-r} d\,lx$,	»:	$\int\limits_0^\infty h(x) x^{-s} d\,lx$
»	202—20,	formule (65),	» » »:	$\mu(x)$,	»:	$\mu(n)$
»	204—22,	» (72),	le dernier membre sous le signe Σ_α doit être $l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right)$.			
»	206—24,	ligne 17,	au lieu de:	$\int\limits_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)} dz$,	lisez:	$\int\limits_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)} d\beta$
»	215—33,	» 22,	» » »:	Césaro,	»:	Cesáro
»	221—39,	formule (111),	» » »:	$\theta(x)$,	»:	$\theta(n)$
»	223—41,	» (118),	» » »:	$\frac{1}{p\left(p - \frac{1}{p}\right)}$,	»:	$\frac{1}{p\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$; le numéro (118) doit être effacé.
»	»	», ligne 5—11,	la lettre x doit être remplacée par n; dans la formule (120), le numérateur et le dénominateur du dernier membre sont en outre intervertis.			
»	224—42,	ligne 28,	au lieu de:	$\sum\limits_2^n A_p lp$,	lisez:	$\sum\limits_2^\infty A_p lp$
»	225—43,	» 18,	» » »:	$\Sigma l(x)$,	»:	Σlx
»	231—49,	» 25,	» » »:	eller af $\tilde{\omega}(n)$,	»:	eller Middelværdien af $\tilde{\omega}(n)$
»	236—54,	formule (163),	» » »:	$T(E)$,	»:	$T(Ex)$
»	256—74,	ligne 26,	» » »:	$\sum\limits_1^\infty (s(r) - 1)$,	»:	$\sum\limits_2^\infty (s(r) - 1)$
»	286—104,	en-tête,	» » »:	$\sum\limits_1^n E \frac{n}{x}$,	»:	$\sum\limits_2^n E \frac{n}{x}$